

P - 522



ANALISIS DIMENSIONAL

Y

DISEÑO DE MODELOS

POR

Ing: Juan Guillermo Hercilla González

Noviembre 1984

LIMA - PERU

RESUMEN

Este trabajo muestra la utilidad del análisis dimensional como herramienta para el diseño de modelos a escala reducida en los cuales puedan estudiarse las reacciones ante cargas impuestas, obviándose las dificultades características del tratamiento analítico de los problemas de mecánica de rocas.

INTRODUCCION

Debido a las limitaciones impuestas por la complejidad del tratamiento analítico de los problemas de mecánica de rocas y a causa del error introducido por la asunción de propiedades ideales para la roca y de un campo tensional conocido, los métodos teóricos por sí mismo generalmente no proporcionan respuestas satisfactorias a los problemas de estructuras rocosas. La alternativa a la aproximación teórica es el empleo de métodos empíricos esto es, medir las propiedades de la roca y las tensiones y deformaciones estructurales en modelos de laboratorio o en los sistemas reales.

El diseño de modelos reducidos de laboratorio es, pues, una tarea fundamental del ingeniero de diseño y la herramienta de investigación disponible para este diseño lo constituye la rama de las matemáticas aplicadas conocida con el nombre de análisis dimensional.

El análisis dimensional es el procedimiento que nos permite establecer una relación funcional entre un conjunto de grupos sin dimensión compuesto por las variables del fenómeno, siendo menor el número de grupos que el de variables.

Frecuentemente, el análisis dimensional de cualquier investigación experimental descubre relaciones funcionales entre los parámetros medibles involucrados que simplifican el problema e indican la di-

rección a seguirse en el diseño del programa experimental. Toda similitud y estudio de modelos debería estar basado en un análisis dimensional de manera que los resultados obtenidos puedan ser aplicados al prototipo o sistema real con confianza.

Las dimensiones fundamentales de las cantidades físicas en mecánica que se toman generalmente son masa, longitud y tiempo y se denota por M , L y T , respectivamente. Las dimensiones de las otras cantidades físicas se deducen de sus definiciones. Por ejemplo, el volumen tiene las dimensiones de L^3 , la velocidad tiene las dimensiones LT^{-1} y la fuerza, definida como el producto de la masa por la aceleración, por la ley de Newton, tiene las dimensiones de MLT^{-2} . Así, masa, longitud y tiempo han sido tomadas como cantidades primarias y las secundarias se han expresado en términos de las cantidades primarias.

Las dimensiones de las diversas cantidades físicas que se encuentran en mecánica se resume en la tabla N°1, asumiendo que las cantidades primarias son ya sea masa, longitud y tiempo o fuerza, longitud y tiempo. Algunas cantidades físicas son adimensionales, por ejemplo, la deformación unitaria, la relación de Poisson y los ángulos.

Las aplicaciones más importantes del análisis dimensional en ingeniería son: (1) conversión de ecuaciones o datos de un sistema de unidades a otro, (2) desarrollo de relaciones entre variables, (3) sistematización de la colección de datos y reducción de las variables que deben ser estudiadas en cualquier programa experimental y, (4) establecimiento de los principios de diseño de modelo y asistencia en la interpretación de los datos de pruebas.

HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL
El fundamento matemático del análisis

(*) Ing. de Minas

Director General de Investigación y Tecnología Minera - INGEMMET
Diplomado en Mecánica de Rocas, Inglaterra
Experto en Técnicas Mineras, Francia

dimensional se basa en los dos axiomas siguientes. Primero, la igualdad numérica - absoluta de cantidades existe únicamente - cuando las cantidades tienen las mismas - dimensiones. Segundo, la relación de las - magnitudes de dos cantidades similares es - independiente de las unidades usadas, - siempre que se usen las mismas unidades - para ambas cantidades.

Los dos axiomas citados pueden usarse para clasificar las ecuaciones sobre una base dimensional en homogéneas, homogéneas restringidas y no homogéneas. Si todos los términos de una ecuación dada se reducen a las mismas dimensiones y no contiene constantes dimensionales, se dice entonces que la ecuación es homogénea. Si todos los términos de una ecuación dada se reducen a las mismas dimensiones y contiene uno o más constantes dimensionales, se dice que la ecuación es restringidamente homogénea. Si una ecuación contiene dos o más términos en un miembro, las dimensiones básicas de las cuales no son las mismas y contienen términos dimensionalmente equivalentes en el otro miembro, se dice entonces que la ecuación es no homogénea. Así una ecuación dimensionalmente homogénea permanece verdadera cualquiera que sea el sistema consistente de unidades con que se midan las diversas cantidades, y una ecuación restringidamente homogénea es válida en solo un sistema consistente de unidades. Una ecuación no homogénea puede ser válida pero es de poco uso. La Tabla N°2 muestra ejemplos de los tipos de ecuaciones mencionadas.

PRODUCTOS ADIMENSIONALES

Dado un juego de n variables $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, podemos formar un número infinito de productos de potencias de esas variables.

$$U_i = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_i^{k_i} \dots x_n^{k_n} \quad (1)$$

Los exponentes k_i pueden tener cualquier valor entero positivo o negativo o un valor fraccional, incluyendo cero. Las dimensiones de dichos productos de potencias de las variables pueden encontrarse reemplazando los símbolos x_i con los símbolos de sus dimensiones y elevando los símbolos a la potencia k_i . Por ejemplo, si la variable x_i tiene las dimensiones $M^a L^b T^c$

la dimensión de x^{k_i} es $M^{a k_i} L^{b k_i} T^{c k_i}$. Así la expresión general para las dimensiones de U_i en la ecuación (1) es:

$$(M^a)^{k_1} (L^b)^{k_2} (T^c)^{k_i} \dots (M^a)^{k_n} (L^b)^{k_n} (T^c)^{k_n}$$

ó

$$M^{a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_i k_i + \dots + a_n k_n}$$

$$L^{b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_i k_i + \dots + b_n k_n}$$

$$T^{c_1 k_1 + c_2 k_2 + \dots + c_i k_i + \dots + c_n k_n}$$

Un producto adimensional de potencias es aquel cuyos exponentes de las unidades fundamentales M , L y T se vuelven cero y al cual se designa por π y se le refiere como un π término. El producto de potencias de las variables será adimensional si y únicamente si los exponentes de M , L y T de la expresión anterior satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_i k_i + \dots + a_n k_n = 0$$

$$b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_i k_i + \dots + b_n k_n = 0 \quad (2)$$

$$c_1 k_1 + c_2 k_2 + \dots + c_i k_i + \dots + c_n k_n = 0$$

Podemos formar una matriz de los coeficientes a_i , b_i y c_i de las ecuaciones (2). A dicho ordenamiento de números se le conoce como la matriz dimensional y se le muestra en la Tabla N°3.

TABLA N°3 MATRIZ DIMENSIONAL

	x_1	x_2	...	k_i	k_n
M	a_1	a_2		a_i		a_n
L	b_1	b_2		b_i		b_n
T	c_1	c_2		c_i		c_n

El rango de la matriz dimensional es r si contiene al menos r determinantes no cero y si todos los determinantes de orden mayor que r son cero.

A partir de la teoría algebraica se puede demostrar que las ecuaciones (2) tienen exactamente $n-r$ soluciones linealmente independientes donde r es el rango de la matriz dimensional dada en la Tabla N°3 y n es el número de variables. De esta manera se ha establecido-

el importante teorema del análisis dimensional conocido como el teorema π de Buckingham: el número total de productos adimensionales en un conjunto completo es igual al número total de variables menos el rango de la matriz dimensional. Otro teorema fundamental del análisis dimensional y conocido como el teorema de Buckingham establece: Si una ecuación es dimensionalmente homogénea, dicha ecuación puede reducirse a una relación entre un conjunto completo de productos adimensionales.

EJEMPLO DE APLICACION

Consideraremos un problema en el cual el esfuerzo σ_p en el prototipo depende de las dimensiones de la estructura, L_p ; las propiedades elásticas de la roca E_p y ν_p ; la carga externa F_p aplicada a la estructura y el peso unitario de la roca γ_p . La matriz dimensional es:

	σ_p	γ_p	L_p	E_p	F_p	ν_p
M	1	1	0	1	1	0
L	-1	-2	1	-1	1	0
T	-2	-2	0	-2	-2	2

Con los teoremas anteriores se demuestra que si hay n variables y el rango de la matriz dimensional es r , habrá $p - r$ productos de potencias adimensionales de las variables o π términos donde p viene dado por:

Desde que todos los determinantes de tercer orden se vuelven cero, el rango de la matriz es dos y como las variables son seis, portanto el número de productos adimensionales es cuatro; es decir:

$$p = n - r \quad (3)$$

Existe también una relación funcional entre los π términos que puede representarse como:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_p)$$

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_p) \quad (4)$$

donde:

$$\pi_2 = f(L_p, \sigma_p, \gamma_p)$$

$$\pi_3 = f(L_p, \gamma_p, E_p)$$

$$\pi_4 = f(L_p, E_p, F_p)$$

$$\pi_5 = \nu$$

o también

$$\pi_2 = (L)^{\alpha_1} (ML^{-1} T^{-2})^{\alpha_2} ML^{-2} T^{-2}$$

$$\pi_3 = (L)^{\beta_1} (ML^{-2} T^{-2})^{\beta_2} ML^{-1} T^{-2}$$

$$\pi_4 = (L)^{\theta_1} (MLT^{-2})^{\theta_2} ML^{-1} T^{-2}$$

$$\pi_5 = \nu$$

CONDICIONES DE SIMILTUD MODELO PROTOTIPO

Una función como la mostrada por la ecuación (4) puede escribirse tanto para el modelo como para el prototipo, indicándose los respectivos π términos con los subíndices m y p para el modelo y el prototipo, respectivamente, pudiéndose obtener una relación entre π_{1m} y π_{1p} de la relación:

Siempre que el modelo se diseñe y pruebe tal que:

$$\pi_{2p} = \pi_{2m}$$

$$\pi_{3p} = \pi_{3m}$$

entonces Si dichas condiciones se satisfacen

$$f(\pi_{2p}, \pi_{3p}, \dots, \pi_{qp}) = f(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots, \pi_{gm})$$

y por tanto:

$$\pi_{1p} = \pi_{1m}$$

Como cada grupo debe ser adimensional, la suma de los índices para cada magnitud debe ser igual a cero. Por tanto, para cada factor habrá dos ecuaciones, cuya resolución nos dará el valor de los índices. Igualando a cero los índices de cada magnitud.

$$(1) M: \alpha_2 + 1 = 0 \quad \alpha_2 = -1$$

$$L: \alpha_1 - \alpha_2 - 2 = 0$$

$$\text{de donde: } \alpha_1 + 1 - 2 = 0 \quad \alpha_1 = 1$$

$$\pi_2 = \frac{L_p \gamma_p \delta}{\sigma_p} \frac{\sigma_p}{L_p \gamma_p}$$

$$(2) M: \beta_2 + 1 = 0$$

$$\beta_2 = -1$$

$$L: \beta_1 - 2 \beta_2 - 1 = 0$$

$$\beta_1 + 2 - 1 = 0$$

$$\beta_1 + 1 = 0$$

$$\beta_1 = -1$$

de donde:

$$\pi_3 = \frac{E_p}{L_p \gamma_p} \frac{\delta L_p \gamma_p}{E_p}$$

$$(3) M: \theta_2 + 1 = 0$$

$$\theta_2 = -1$$

$$\theta_2 = -1$$

$$L: \theta_1 + \theta_2 - 1 = 0$$

$$\beta_1 - 1 - 1 = 0$$

$$\theta_1 = 2$$

de donde:

$$\pi_4 = \frac{L^2 E_p}{F_p} \frac{\delta F_p}{L^2 E_p}$$

De donde obtenemos los cuatro productos dimensionales

$$\frac{\sigma_p}{\gamma L_p}, \frac{\gamma_p L_p}{E_p}, \frac{F_p}{E_p L_p^2}, \nu$$

PRUEBAS DESTRUCTIVAS DE MODELOS

Si se calcula la resistencia última de una estructura subterránea usando datos de las propiedades mecánicas determinadas en el Laboratorio, (compresión, corte, resistencia tensional, etc), entonces será necesario asumir un criterio de falla debido a que los estados de esfuerzo en el modelo (propiedad física del espécimen) y el prototipo (estructuras subterráneas) son diferentes. Este problema es obviado si el modelo es una representación escalar del prototipo, hecho de la roca del prototipo, y se prueba a destrucción porque en este caso los estados de tensión en ambas pueden ser idénticos.

Sin embargo, a causa de los errores experimentales y la variabilidad de la roca, debe probarse cierto número de modelos para obtenerse una resistencia promedio estadísticamente aceptable. A menos que la forma del modelo sea simple, la fabricación de modelos puede llegar a ser un factor limitante.

Los modelos para pruebas destructivas se hacen de dos clases de materiales, ya sea del mismo material del prototipo o de un material sintético con propiedades que escalen a aquellas del prototipo. Los modelos hechos del mismo material de prototipo satisfacen las condiciones siguientes:

$$E_m = E_p$$

$$\gamma_m = \gamma_p$$

$$\nu_m = \nu_p$$

Si el factor escala prototipo a modelo es L_p/L_m , entonces:

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{L_p^2}{L_m^2}$$

$$\sigma_p = \sigma_m$$

Además, si σ_{fm} y σ_{fp}

son los esfuerzos de falla en el modelo y prototipo, entonces:

$$\sigma_{fm} = \sigma_{fp}$$

INVESTIGACIONES DE HIRAMASU Y OKA EN MODELOS DESTRUCTIVOS

Para ilustrar la utilidad de las pruebas destructivas consideremos las investigaciones de Hiramasa y Oka. En las pruebas, los modelos hechos de mármol y arenisca conteniendo un agujero circular Fig.1a, fueron sometidos a una carga F_y de compresión uniaxial y $F_x = \frac{F_y}{4}$ que produjo el estado tensional indicado en la Fig.1b (asumiendo que el modelo es una placa delgada). Debido a que la carga aplicada al modelo era grande comparada con el peso de la roca la carga másica y fue despreciada. Esto es equivalente a asumir que la profundidad de-

La abertura prototipo es grande comparada con sus dimensiones verticales. Cuando se aplicó la carga uniaxial, aparecieron fisuras de tensión a lo largo o cerca de las líneas TT1 en la dirección de σ_y , y cuando se aplicó la carga biaxial ocurrió la falla por trituración a lo largo de la línea CC'. Las tensiones en los puntos T y C fueron calculados a partir de la teoría elástica usando la ecuación siguiente:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_y(1 + 2 \cos \theta) + \sigma_x(1 - 2 \cos 2 \theta)$$

Para el caso uniaxial $\sigma_x = 0$, y el esfuerzo tangencial en el punto C se obtiene haciendo $\theta = 0^\circ$, y $\sigma_c = 3 \sigma_y$; en el punto T, $\theta = 90^\circ$ y $\sigma_t = - \sigma_y$. Para el caso biaxial con $\sigma_x = \frac{1}{4} \sigma_y$, el esfuerzo tangencial en el punto C es $\sigma_c = - 2.75 \sigma_y$, y en el punto T, $\sigma_t = 0.25 \sigma_y$. La comparación de las tensiones de falla calculadas en esos puntos con pruebas de laboratorio de compresión uniaxial, tensional y de resistencia a la flexión se da en la tabla N°4. Para el caso biaxial la magnitud del esfuerzo compresivo de falla en C para el mármol y la arenisca concuerdan con la resistencia compresiva uniaxial correspondiente. Para el caso uniaxial la magnitud del esfuerzo tensional de falla concuerdan razonablemente con la resistencia a la flexión (resistencia tensional de la fibra más externa) pero la

resistencia tensional uniaxial de ambas rocas fue menos de la mitad del esfuerzo tensional de falla correspondiente en el modelo. De esta manera, para un túnel circular o una galería en un campo de esfuerzos uniaxial o biaxial, los resultados en dichos modelos indican que la teoría del esfuerzo máximo es válido y sugiere que cualquier masa de roca no constreñida o parcialmente constreñida fallará cuando se exceda su resistencia compresiva uniaxial o su resistencia a la flexión.

CONSIDERACIONES FINALES

- El estudio sobre modelos a escala reducida obvia las dificultades características del estudio analítico de los problemas de aberturas rocosas.
- Los teoremas de Buckingham, enunciados en 1914, sumarizan la teoría total del análisis dimensional.
- Se considera importante introducir, las nociones del análisis dimensional dentro del curso de mecánica de rocas a fin de que los estudiantes de ingeniería de minas conozcan los fundamentos de la investigación sobre modelos.

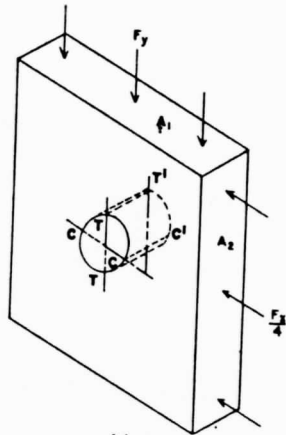
TABLA No. 1
CANTIDADES FISICAS Y SUS DIMENSIONES.

CANTIDAD	SIMBOLO	DIMENSION	
		PARA M,L,T	PARA FL,T
LONGITUD	l	L	L
AREA	A	L ²	L ²
VOLUMEN	V	L ³	L ³
TIEMPO	t	T	T
MASA	m	M	FL ⁻¹ T ²
VELOCIDAD	v	LT ⁻¹	LT ⁻¹
ACELERACION	a	LT ⁻²	LT ⁻²
CARGA	F	MLT ⁻²	F
DENSIDAD DE MASA	p	ML ⁻³	FL ⁻⁴ T ²
PESO ESPECIFICO Y PESO UNITARIO	γ o p _g	ML ⁻² T ⁻²	FL ⁻³
ANGULO	θ, φ	1	1
VELOCIDAD ANGULAR	ω	T ⁻¹	T ⁻¹
ACELERACION ANGULAR	α	T ⁻²	T ⁻²
PRESION O ESFUERZO	p, σ, τ	ML ⁻¹ T ⁻²	FL ⁻²
TRABAJO O ENERGIA	T, W	ML ² T ⁻²	FL
MOMENTO	mv	MLT ⁻¹	FT
POTENCIA	P	ML ² T ⁻³	FLT ⁻¹
MOMENTO DE CARGA	M	ML ² T ⁻²	FL
MOMENTO DE INERCIA DE UNA AREA	I	L ⁴	L ⁴
MOMENTO DE INERCIA DE UNA MASA	I	ML ²	FLT ²
MODULO DE ELASTICIDAD	E	ML ⁻¹ T ⁻²	FL ⁻²
ESFUERZO UNITARIO	σ, γ	1	1
RELACION DE POISSON	ν	1	1
MODULO DE RIGIDEZ	G	ML ⁻¹ T ⁻²	FL ⁻²
MODULO BULK	K	ML ⁻¹ T ⁻²	FL ⁻²

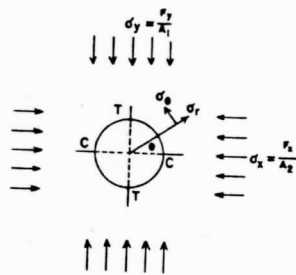
TABLA No. 2

EJEMPLOS DE ECUACIONES HOMOGENEAS NO HOMOGENEAS Y HOMOGENEAS RESTRINGIDA.

No.	ECUACION	TIPO
1	$s = \frac{1}{2} g t^2$	HOMOGENEAS
2	$s = 16.11 t^2$	HOMOGENEAS RESTRINGIDAS
3	$v = at$	HOMOGENEAS
4	$s + v = \frac{1}{2} g t^2 + at$	NO HOMOGENEAS
5	$W = mg$	HOMOGENEAS
6	$W = 32.2m$	HOMOGENEAS RESTRINGIDAS
7	$v = \frac{W}{F}$	HOMOGENEAS
8	$T = \frac{1}{2} m v^2$	HOMOGENEAS
9	$\sigma_x = \frac{1}{E} [\alpha_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$	HOMOGENEAS
10	$W = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x$	HOMOGENEAS



(a)



(b)

FIGURA 1. MODELO DE UN ASUJERO CIRCULAR EN UNA PLACA

TABLA No. 4

CLASE DE PRUEBA	TIPO DE ROCA	NUMERO DE PRUEBAS	LA FALLA COMIENZA A APARECER	PARA EL ESFUERZO VERTICAL PROMEDIO (σ_v), psi		ESFUERZO TEORICO, psi		RESISTENCIA COMPRESIVA UNIAxIAL, psi	RESISTENCIA TENSIONAL UNIAxIAL, psi	RESISTENCIA A LA FLEXION, psi
				A1		σ_c	σ_T			
COMPRESION UNIAxIAL										
$\sigma_v = \frac{F_v}{A}$	Mármol	12	Punto T	- 1680	- 5050	1680	- 12,800	750	1820	
$\sigma_h = 0$	Arenisca	16	Punto T	- 3540	- 10,600	3540	- 22,300	1570	3270	
COMPRESION BIAxIAL										
$\sigma_v = \frac{F_v}{A}$	Mármol	15	Punto C	- 4600	- 13,700	1160	- 12,800	750	1820	
$\sigma_h = \frac{F_h}{4A}$	Arenisca	15	Punto C	- 8600	- 23,700	2170	- 22,300	1570	3270	

© DE HIRAHATSU Y OKA