

Modelamiento Numérico Espacio-Temporal comparativo de la Infiltración, usando las ecuaciones de Richards, Green Ampt, Smith-Parlange, y Resultados Experimentales

Comparative Temporary Space Numerical Modeling of the infiltration by Richards, Green Ampt, Smith-Parlange equations and experimental results

Pino Vargas E.¹, Bedoya Jaén C.², Román Arce C.³

¹ Ph.D. Recursos Hídricos, Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann, Tacna, Perú, epino68@hotmail.com

² M.Sc. Geological Survey. Universidad Nacional Basadre Grohmann, Tacna, Perú, conra19@yahoo.es

³ Ing. Geólogo-Geotécnico Universidad Nacional Basadre Grohmann, Tacna, Perú, carmenroman@terra.com.pe

RESUMEN

La infiltración es uno de los procesos hidrogeológicos que cobra mucha importancia en la ingeniería ambiental y en estudios de agua subterránea, por décadas muchos investigadores han venido haciendo esfuerzos en modelar el proceso de infiltración, partiendo de la ecuación de Richards (1931). El comportamiento de la infiltración puede ser tratado en forma espacial y temporal en su forma más compleja, y dependiendo del uso que se requiera se puede modelar hasta en su forma unidimensional más la componente temporal. En este trabajo se reduce la ecuación de Richards a su expresión unidimensional más su componente temporal, y se resuelve bajo el método de diferencias finitas, usando el esquema de Crank-Nicolson en un esquema implícito alterno exacto de segundo orden. Dicho esquema fue codificado en MATLAB, y los resultados cumplen satisfactoriamente el objetivo de predecir el movimiento del agua subterránea a partir de las propiedades físicas de los suelos, y las condiciones impuestas tipo Dirichlet de carga de agua sobre el suelo. Asimismo el modelo es muy versátil, puesto que permite establecer al usuario condiciones como; profundidad total de simulación, espaciamiento entre nudos e intervalos de cálculo para la variable temporal. En el caso del modelo de Smith-Parlange (1978), fue resuelto usando el algoritmo de Newton Raphson, el mismo que también fue implementado en un código computacional en MATLAB, arrojando resultados satisfactorios similares a los del modelo anterior. Asimismo se elaboró un código computacional, para resolver el Modelo Green Ampt (1911), haciendo la comparación de los tres modelos mencionados.

Descriptores: *Ecuación de Richards, Smith Parlange, Green Ampt, Infiltración, Modelamiento Numérico 1D*

ABSTRACT

The infiltration is one of the hydrogeological processes of great importance in the environmental engineering and water resources, since Richards's equation (1931), efforts from many investigators to model the process of infiltration have been going on through decades. The behavior of the infiltration can be treated on its most complex way in three dimensional form and time, and according to the required use even in its one-dimensional form and its temporary component. In this assignment Richards's equation is reduced to its one-dimensional expression and its temporary component, it gets solved by the finite differences method using the Crank Nicolson scheme under accurate altern implicit scheme of second order in both space and time. This scheme was coded in MATLAB, and the results fulfill successfully the objective to predict the water movement in the sub soil, judging from the data of soil physical properties and dirichlet imposed conditions of water load on the floor. The model is very versatile since it allows the user to set conditions such as total depth of simulation, spacing between nodes and calculating intervals for the temporary variable. The case of Smith-Parlange model (1978), was solved using the Newton Raphson algorithm, which was also implemented in a computer code in MATLAB, giving satisfactory results similar of those of the previous model. As well as computational code that was made to solve the Green Ampt Model (1911) comparing the three mentioned models.

Keywords: *Richards's equation, Smith Parlange, Green Ampt, Infiltration, Numerical modeling 1D*

INTRODUCCIÓN

El proceso de infiltración del agua en el suelo puede efectuarse tomando como base la ecuación de Richards (1931), que resulta de la combinación de la ecuación de continuidad con el campo de velocidades, calculado conforme a la ley de Darcy.

La no linealidad de las propiedades del suelo como; conductividad hidráulica (K), difusión capilar (D) y capacidad específica de agua en el suelo (C), ha evitado soluciones analíticas exactas, sin embargo actualmente el modelo conceptual de mayor aceptación es el modelo Richards.

La tasa de infiltración con respecto al tiempo, es gobernada por la ecuación de Richard, sujeta a una condición de humedad antecedente en el perfil del suelo, la tasa de agua aplicada en la superficie del suelo y las condiciones del perfil de suelo. En general, el potencial inicial de agua en el suelo, varía con la profundidad del suelo. Las condiciones iniciales (t=0) pueden ser expresadas, como un perfil de la carga potencial métrico variando con respecto a la profundidad.

Las condiciones de borde de la superficie del suelo dependerán de la tasa de aplicación de agua. Para un evento de lluvia con intensidad menor o igual a la conductividad hidráulica en condiciones saturadas, toda la lluvia infiltrará al suelo y no se generará escurrimiento. Para lluvias de alta intensidad, toda la lluvia infiltrará en el suelo durante los primeros momentos, hasta que la superficie del suelo se sature ($\Theta = \Theta_s$, $h \geq 0$, $z = 0$) denominado "tiempo de encharcamiento". Después de éste tiempo la infiltración será menor que la intensidad de la lluvia, y se dará inicio al escurrimiento.

METODOLOGÍA

La solución de la ecuación de Richards hace indispensable representar las propiedades hidrodinámicas en el potencial de presión (h) y la conductividad hidráulica (K), como funciones del contenido volumétrico.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K}{\partial z} \quad \dots(1)$$

Pavese et al., 1999, si bien el flujo en la zona no saturada es de carácter tridimensional no es difícil establecer que el flujo será principalmente vertical.

Ecuaciones que Gobiernan el Proceso

Durante las últimas décadas muchos investigadores se abocaron a la tarea de relacionar la humedad y la conductividad hidráulica no saturada con la tensión Gardner 1958, Brooks y Corey 1964, y Van Genuchten 1980, entre otros. En este modelo se utilizaron las formulas de Gardner para la determinación de los valores K(h) y $\theta(h)$.

$$K(h) = K_s e^{\alpha h} \quad \dots(2)$$

Donde K_s (m/día) es la conductividad hidráulica del suelo saturado, α (cm^{-1}) es un parámetro que caracteriza al tipo de suelo. La curva característica de humedad utilizada es una de tipo exponencial.

$$\theta(h) = (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha h} + \theta_r \quad \dots(3)$$

Donde θ_s es el contenido de agua a saturación ($\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$) y θ_r es el contenido de agua a residual ($\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$). La no linealidad representada por los parámetros K y C con la variable de estado h, se elimino parcialmente aplicando un cambio de la variable dependiente a través de la integral transformada de Kirchoff, introduciendo dicha transformada en la ecuación de Richards unidimensional se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{C(h)} \frac{\partial K(h)}{\partial h} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{K(h)}{C(h)} \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} \quad \dots(4)$$

Esta transformación fue previamente utilizada por Haverkamp and Vauclin (1981), y Kutilek et. al (1991), entre otros. Introduciendo las expresiones (2) y (3) en (4) y teniendo en cuenta que $C(h) = dq(h)/dh$, se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{K_s}{(\theta_s - \theta_r)} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{K_s}{(\theta_s - \theta_r) \alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} \quad \dots(5)$$

Donde los coeficientes que preceden a las derivadas espaciales son constantes y es función de los parámetros físicos del suelo. Además, de acuerdo a la transformación de Kirchoff y la relación de conductividad hidráulica adoptada y haciendo:

$$C = \frac{K_s}{(\theta_s - \theta_r)}, \quad \gamma = \frac{K_s}{(\theta_s - \theta_r) \alpha} \quad \dots(6)$$

La ecuación de Richards en forma unidimensional con variación espacial temporal a resolver, se reduce a:

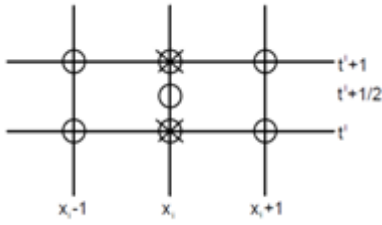
$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} \quad \dots(7)$$

Esquema Numérico de Solución

La solución numérica de la ecuación (7) la podemos hacer usando el método de las diferencias finitas, por su facilidad de implementación. El avance temporal lo formulamos mediante el método de Crank-Nicolson, el que proporciona un esquema implícito alterno exacto en segundo orden tanto en espacio como en tiempo (Chapra 1998).

Fig. 01 Esquema Computacional por el Metodo de Crank-Nicolson

- X Puntos de la malla involucrados en las diferencias temporales
- O Puntos de la malla involucrados en las diferencias espaciales



En el primer nudo interior para la aproximación temporal y espacial tenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_i^{t+1} - h_i^t}{\Delta t} \quad C \frac{\partial h}{\partial z} = C \left(\frac{h_{i+1}^t - h_{i-1}^t}{2\Delta z} \right) \quad \dots(8)$$

La segunda derivada en el espacio corresponde al punto medio como promedio de las aproximaciones al inicio y final del incremento de tiempo:

$$\gamma \frac{\partial^2 h}{(\partial z)^2} = \gamma \frac{1}{2} \left(\frac{h_{i+1}^t - 2h_i^t + h_{i-1}^t}{(\Delta z)^2} + \frac{h_{i+1}^{t+1} - 2h_i^{t+1} + h_{i-1}^{t+1}}{(\Delta z)^2} \right) \quad \dots(9)$$

$$-Ah_{i-1}^{t+1} + 2(1+A)h_i^{t+1} - Ah_{i+1}^{t+1} = (A+B)h_{i-1}^t - 2(A-1)h_i^t + (A-B)h_{i+1}^t \quad \dots(10)$$

$$A = \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta z)^2} \quad y \quad B = \frac{C \Delta t}{(\Delta z)^2}$$

La condición de frontera de $h_o^{t+1} = f_o(T^{t+1})$

Puede ser prescrita para deducir el primer nudo interior, entonces este será:

$$2(1+A)h_1^{t+1} - Ah_2^{t+1} = (A+B)f_o(T^{t+1}) - 2(A-1)h_1^t + (A-B)h_2^t + Af_o(T^{t+1}) \quad \dots(11)$$

Para el último nudo interior no existe la condición de frontera:

$$h_{m+1}^{t+1} = f_{m+1}(T^{t+1})$$

Por esta razón, para este nudo interior, se aplicó las formulas de diferencias finitas divididas hacia atrás, de esta forma la primera derivada espacial fue aproximada en:

$$C \frac{\partial h}{\partial z} = C \left(\frac{h_i^t - h_{i-1}^t}{\Delta z} \right) \quad \dots(12)$$

Y la segunda derivada en el espacio fue determinada en el punto medio, al promediar las aproximaciones al inicio y al final del incremento de tiempo.

$$\gamma \frac{\partial^2 h}{(\partial z)^2} = \gamma \frac{1}{2} \left(\frac{h_i^t - 2h_{i-2}^t + h_{i-1}^t}{(\Delta z)^2} + \frac{h_i^{t+1} - 2h_{i-2}^{t+1} + h_{i-1}^{t+1}}{(\Delta z)^2} \right) \quad \dots(13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (8), (12) y (13) en la ecuación (7) se obtiene:

$$\frac{h_i^{t+1} - h_i^t}{\Delta t} + C \frac{h_i^t - h_{i-1}^t}{\Delta z} = \gamma \frac{1}{2} \left(\frac{h_i^t - 2h_{i-2}^t + h_{i-1}^t}{(\Delta z)^2} + \frac{h_i^{t+1} - 2h_{i-2}^{t+1} + h_{i-1}^{t+1}}{(\Delta z)^2} \right) \quad \dots(14)$$

Reagrupando términos tenemos:

$$\begin{bmatrix} 2(1+A) & -A & 0 & \dots & 0 \\ -A & 2(1+A) & -A & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -A & 2A & 2-A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{t+1} \\ h_2^{t+1} \\ \dots \\ h_m^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A+B)f_o(T^{t+1}) - 2(A-1)h_1^t + (A-B)h_2^t + Af_o(T^{t+1}) \\ (A+B)h_1^t - 2(A-1)h_2^t + (A-B)h_3^t \\ (A+B)h_2^t - 2(A-1)h_3^t + (A-B)h_4^t \\ \dots \\ A_m^t - 2(A-B)h_{m-1}^t + (A-2B+2)h_m^t \end{bmatrix} \quad \dots(15)$$

Las ecuaciones (10) y (15) son tridiagonales y por lo tanto se pueden resolver de manera eficiente mediante el sistema de ecuaciones. Para la solución del sistema de ecuaciones planteado, se elaboró un código computacional en MATLAB.

El Modelo Smith Parlange (1978), desarrollado por Woolhiser (1989), es la siguiente:

$$f = K_s \frac{e^{F/B}}{e^{F/B} - 1} \quad \dots(16)$$

Donde:

F: Infiltración acumulada [L], f: Velocidad de infiltración [L/T], K_s : Conductividad hidráulica a saturación natural [L/T], $B = G(\theta_s - \theta_1)$ o $B = G\phi(S_{max} - S_1)$, θ_s : Contenido de humedad a saturación natural (L^3/L^3), θ_1 : Contenido de humedad inicial (L^3/L^3), ϕ : Porosidad del suelo [L^3/L^3], S : Saturación relativa, S_{max} : Saturación relativa máxima, S_1 : Saturación relativa inicial y G es definida como:

$$G = \frac{1}{K_s} \int_{-\infty}^0 K(h) dh \quad \dots(17)$$

En la cual: h : potencial de presión [L], $K(h)$: Conductividad hidráulica [L/T], G : Potencial de escurrimiento o potencial de presión, debido a capilaridad [L]. En el cálculo de la infiltración se debe elegir correctamente el primer estimador de F , para que haya convergencia al utilizar el Newton-Raphson; un buen estimador es: $F = K_s t$, y la aproximación de F se da según:

$$F_{k+1}^j = F_k^j + \delta F^j \quad \dots(18)$$

Donde 'j' denota el paso de tiempo y 'k' la iteración respectiva y

$$\delta F^j = -r/\partial r/\partial F \quad \frac{\partial r}{\partial F} = \frac{1 - 1/e^{F/B}}{K_s} \quad \dots(19)$$

Se conseguirá la solución cuando: $|r_i| \leq r_{max}$.

El Modelo Green Ampt (1911), fue el primer modelo físicamente basado en ecuaciones que describen la infiltración de agua en el suelo. Este modelo entrega la infiltración acumulativa y la velocidad de infiltración como funciones implícitas del tiempo.

Las ecuaciones tienen que ser resueltas de una manera iterativa para obtener estas cantidades. El modelo explícito Green-Ampt desarrollado por Salvucci y Entekhabi (1994), facilitó una estimación sincera y exacta de la infiltración para cualquier tiempo dado. Las formulaciones matemáticas para este modelo son las siguientes:

$$\int \frac{dF}{dt} = \int K \left(\frac{\psi \Delta \theta + F}{F} \right) = F(t) - \psi \Delta \theta \ln \left(1 + \frac{F(t)}{\psi \Delta \theta} \right) = Kt \quad \dots(20)$$

La ecuación (20), es conocida como la ecuación de Green Ampt para la infiltración acumulada. Como se trata de un caso en el que se tiene encharcamiento en superficie, la variable ψ , debe ser reemplazada por $(\psi - h_o)$. Donde K es la conductividad, ψ carga de succión de suelo en el frente de mojado, $\Delta \theta$ cambio en el contenido de humedad en el frente de avance.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Usando los modelos elaborados y el respectivo código computacional desarrollado en MATLAB (abreviatura de MATRix LABoratory, "laboratorio de matrices") que es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE), con un lenguaje de programación propio (lenguaje M), se procedió a efectuar procesos de simulación, para lo cual se tomó datos referenciales de un suelo con características Franco-Limosos, para lo cual se

tienen los siguientes datos de entrada: $t=10, 25, 50, 100, 200, 300, 500, 1\ 000, 5\ 000$ y $10\ 000$ min; Tiempo de Simulación. $z=100$; Profundidad de la columna de suelo a ser simulada (cm). $K_s=0,011$; Conductividad Hidráulica Saturada (cm/min). $\theta_s=0,255$; Contenido de agua a saturación (cm^3/cm^3). $\theta_r=0,045$; Contenido de agua a residual (cm^3/cm^3). $\alpha=0,0021$; Constante alfa (cm^{-1}). $\Delta t=10$; Intervalo de tiempo para calculo (min). $\Delta z=10$; Discretización espacial (cm). $h_0=0$; Condición de borde, que puede ser sustituida por cualquier valor de carga hidráulica sobre la superficie del suelo, presión de succión (cm). $h_1=-1000$; Condición inicial, presión de succión (cm).

Para observar los resultados obtenidos, visualizamos un grafico que relaciona la Profundidad z (cm) con el contenido de humedad volumétrico ($\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$).

Fig. 02 Curva de contenido de agua para diferentes tiempos, tomando como referencia la superficie del suelo.

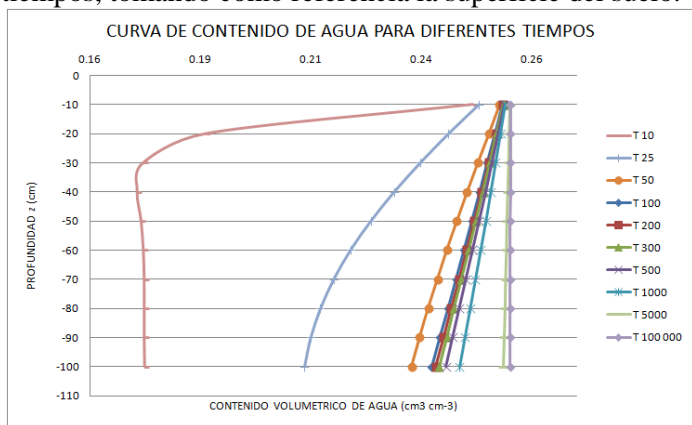


Fig. 03; Curva de desplazamiento del frente mojado para los tres modelos ensayados y datos experimentales tomados de Dahualde G. (2005)



Fig. 04 Frentes de avance y análisis de regresión

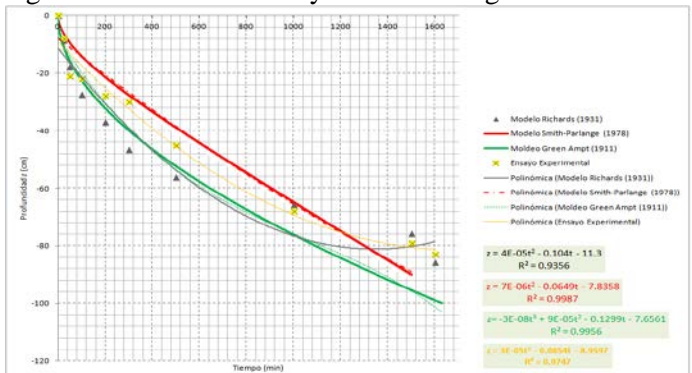
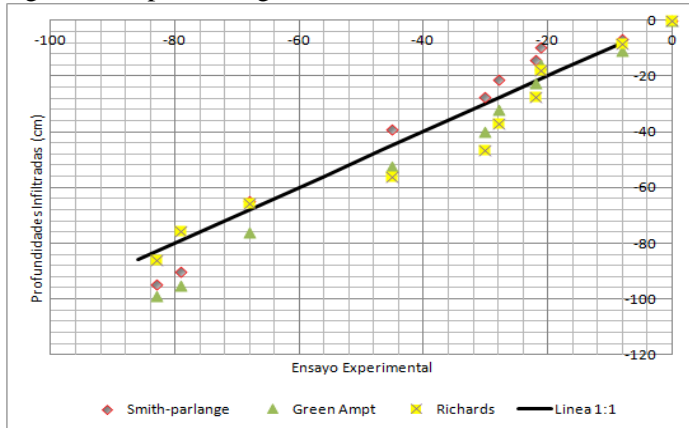


Fig. 05 Comparación gráfica de los resultados obtenidos



Los resultados obtenidos con la simulación muestra el contenido volumétrico de agua para condiciones medias de un suelo franco limoso, en función de la profundidad a diferentes intervalos de tiempos: 10, 25, 50, 100, 200, 300, 500, 1 000, 5 000 y 10 000 min. Podemos observar que los valores mínimos del contenido de agua, inicialmente a lo largo del perfil del suelo, tienden al valor del contenido de humedad residual característico en este tipo de suelo, luego van aumentando en el tiempo en forma descendente con respecto a la profundidad.

Asimismo el contenido de agua en el tiempo tiende al valor a saturación, por tanto mientras aumente el tiempo transcurrido, el valor del contenido de agua tiende al valor de saturación, entendiéndose que el suelo estará saturado en cualquier punto a lo largo del perfil del suelo. Si observamos la figura 02, a 60 cm de profundidad encontramos que a los 500 min, tiende el punto de contenido de agua a saturación, o está muy próximo, no siendo así en los tiempo menores a este.

TIEMPO (min)	MODELOS ENSAYADOS				CALCULO DE ERRORES RELATIVOS		
	Richards	Smith-Parlange	Green Ampt	Experim.	Richards	Smith-Parlange	Green Ampt
25	-8.52	-6.60	-11.04	-8.14	4.48	-23.33	26.27
50	-17.91	-9.61	-15.72	-21.10	-17.83	-119.56	-34.22
100	-27.45	-14.21	-22.45	-22.00	19.84	-54.82	2.00
200	-37.01	-21.46	-32.19	-28.00	24.35	-30.48	13.02
300	-46.60	-27.70	-39.84	-30.06	35.49	-8.52	24.55
500	-56.22	-38.97	-52.28	-45.12	19.74	-15.78	13.70
1000	-65.93	-64.91	-76.17	-68.11	-3.31	-4.93	10.58
1500	-75.89	-90.08	-95.42	-79.09	-4.22	12.20	17.11
1600	-85.88	-95.00	-98.94	-83.02	3.33	12.61	16.09
Cef	0.98	0.94	0.99	1.00			
RMSE	0.00	0.00	0.00	Em	9.82	30.65	9.13

Cef= Coeficiente de eficiencia (Nash y Sutcliffe, 1970) o coeficiente de correlación con respecto a la línea 1:1; RMSE= Raíz del error cuadrático medio. Em=Error medio

Tabla 01 Coeficientes de eficiencia y errores de los modelos

Como se puede observar el error relativo medio para el modelo Green Ampt, resulta 9,13%, comparativamente menor que el de Richards que es 9,82% y Smith-Parlange en 30,65%, respecto a los resultados experimentales obtenidos por Dahualde G. (2005). Lo mismo ocurre con el coeficiente de eficiencia respecto a la línea 1:1, que son mejores los resultados del modelo Green Ampt 0,99 frente a 0,98 para Richards y 0,94 para Smith-Parlange.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos con las simulaciones efectuadas, se puede concluir que el modelo 1D basado en la ecuación de Richards desarrollado para la infiltración, cumple satisfactoriamente el objetivo esta puede predecir el movimiento del agua en el subsuelo a partir de parámetros físicos de los suelos y condiciones impuestas tipo dirichlet de carga de agua sobre el suelo. Asimismo el modelo es muy versátil, puesto que permite establecer al usuario condiciones; como profundidad total de simulación, espaciamiento entre nudos e intervalos de cálculo para la variable temporal.

De las correlaciones y los cálculos de errores efectuados se concluye que el modelo de Green Ampt tiene mejores resultados que el modelo de Richards y Smith-Parlange, tomando como referencia los resultados experimentales obtenidos por Dahualde G. (2005).

De los resultados en forma representativa a los modelos y resultados experimentales citados, se observa que en los instantes iniciales el frente mojado avanza rápidamente en la dirección vertical, lo que se refleja en la pendiente que inicialmente presenta la curva, debido al acelerado aumento del contenido volumétrico de agua con respecto a la profundidad. Luego el frente mojado avanza cada vez más lento, lo que se manifiesta en una pendiente menos pronunciada.

Es muy importante el hecho que se requiere simular durante el proceso de infiltración de agua en el suelo en diferentes escenarios, por ejemplo; la agricultura, conservación de suelos, etc. Asimismo este modelo de Richards (1931) puede determinar la velocidad de infiltración, la misma que influye en el escurrimiento superficial, y a su vez en el proceso de erosión hídrica. Otra importante utilidad radica en los trabajos de manejo de recursos hídricos en obras urbanas, referidas al diseño de alcantarillas, zanjas de infiltración, etc.

Se propone que los resultados obtenidos con este modelo sean validados, con datos experimentales de campo o laboratorio en las diferentes regiones del país.

REFERENCIAS

- [1] CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. Métodos Numéricos para Ingenieros. Mc. GRAW-HILL INTERAMERICANA EDITORES S. A. de C.V. p. 851-957, Marzo 2003.
- [2] CLEMMENS, A. J., Discusión of dimensionless solutions of border irrigation advance by STREALKOFF, T., KATAPODES, N., (1977). In Journal of irrigation and Drainage Engineering. ASCE, vol. 104, num. 3, p. 337-339, 1978.
- [3] ORTIZ, J.; NIKOLSKII, I.; PALACIOS, O.; ACOSTA, R.; Pérdidas de Agua de Riego por Precolación Profunda Durante el Proceso de Infiltración. Revista TERRA Latinoamericana, Revista Mexicana de la Ciencia del Suelo, vol 17, num 2, p. 115-124, junio 1999.
- [4] REYNA, M., REYNA, T.; Interacción de los procesos de escorrentía e infiltración. <http://www.unesco.org.uy/phi/libros/congreso/36reyna> II CONGRESO ARGENTINO DE HIDROGEOLOGIA, IV SEMINARIO HISPANO ARGENTINO SOBRE TEMAS ACTUALES DE LA HIDROLOGIA SUBTERRANEA. Santa Fe, Argentina 28 de Setiembre al 1 de Octubre de 1999.
- [5] SAUCEDO, H., FUENTES, C., ZAVALA, M.; El sistema de ecuaciones de Saint-Venat y Richards del riego por gravedad: 2. Acoplamiento numérico para la fase de avance en el riego por melgas. Revista Ingeniería Hidráulica en México, vol XX, num 2, p. 109-119, Abril-Junio 2005.