

MÉTODO ANALÍTICO PARA DETERMINAR LA DISTRIBUCIÓN DE LOS ESFUERZOS NORMALES SOBRE UNA SUPERFICIE POTENCIAL DE ROTURA PLANA

Belandria Norly¹, Ucar Roberto², Bongiorno Francisco².

¹ Universidad de Los Andes, nbelandria@ula.ve

² ULA. Grupo de Investigaciones en Geología Aplicada. Escuela de Ing. Geológica. Mérida. frabon@ula.ve

RESUMEN

El movimiento de una masa rocosa en la superficie de un talud, debido a la acción de la gravedad, el debilitamiento progresivo de los materiales, consecuencia de la meteorización y a la actuación de otros fenómenos naturales y ambientales, hacen que los movimientos del terreno sean relativamente habituales en la masa rocosa que conforma el talud. El objetivo fundamental es determinar un método analítico que permita estudiar los esfuerzos normales y de corte y su distribución en taludes con superficie de deslizamiento plana. La importancia de conocer la distribución de los esfuerzos en los taludes cuya superficie de rotura es plana es hallar expresiones matemáticas que permitan conocer con mayor precisión el factor de seguridad. También se determina un promedio de los esfuerzos que actúan en la superficie de falla cuya inclinación de la superficie del talud no es perpendicular y se realizan comparaciones con fórmulas planteadas por Ucar (2004) en su libro de manual de anclajes con la finalidad de corroborar los resultados obtenidos y una ampliación de las fórmulas permitiendo hallar en cualquier punto de la superficie de rotura el valor del esfuerzo normal y de cizalla.

Palabras claves: Talud, superficie de rotura, geotecnia, rotura plana, factor de seguridad.

INTRODUCCIÓN

Aplicando el criterio de falla de Mohr-Coulomb, conjuntamente con las ecuaciones de equilibrio estático, se ha desarrollado una expresión analítica que permite determinar los esfuerzos en cada punto de la superficie potencial de deslizamiento para el caso particular de rotura plana en taludes rocosos. Con el apoyo de ejemplos sencillos se aprecia la importancia de esta nueva metodología, y su utilidad en el análisis de la estabilidad de taludes.

MARCO REFERENCIAL

Si se desea calcular los esfuerzos sobre un plano inclinado con respecto a un ángulo α se utiliza los ejes de rotación $x'y'$ (fig. 1) que coincida con el plano donde están aplicados los esfuerzos principales y se debe obtener la matriz de rotación con respecto al plano xy . Calculando la matriz de rotación:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(90 - \alpha) \\ \cos(90 + \alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Calculamos los esfuerzos en el sistema coordenado rotado:

$$\sigma_{i'j'} = R \sigma_{ij} R^T \quad (2)$$

Expandiendo la expresión anterior:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Resolviendo el sistema matricial se obtiene los esfuerzos normal en dirección x, en dirección y, y tangencial o de cizalla:

$$\sigma_{x'x'} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos(2\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\tau_{xy} \quad (4)$$

$$\sigma_{y'y'} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\cos(2\alpha) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\tau_{xy} \quad (5)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\sin(2\alpha) + \tau_{xy}\cos(2\alpha) \quad (6)$$

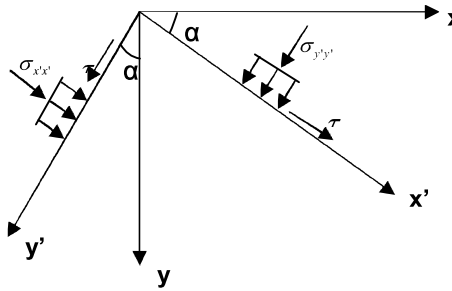


Fig. 1 Representación de la rotación de ejes con respecto al plano xy.

MÉTODO ANALÍTICO PARA DETERMINAR LA DISTRIBUCIÓN DE LOS ESFUERZOS CUYA SUPERFICIE DE ROTURA ES PLANA

Se presenta un talud con una inclinación (β), y se quiere determinar como serán los esfuerzos en ese plano inclinado fig. 2.

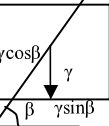
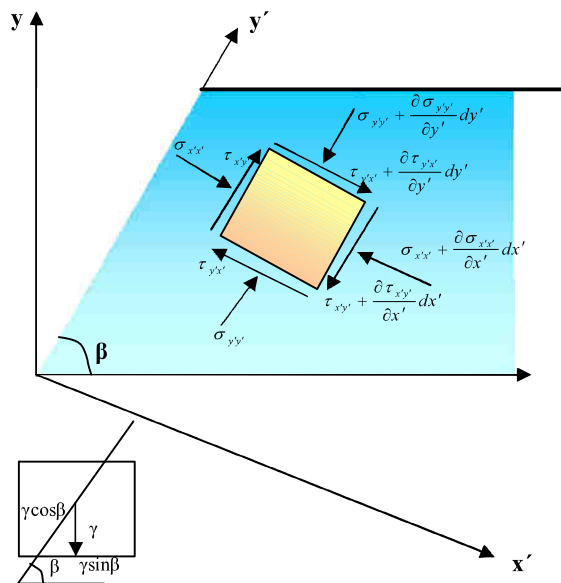


Fig. 2 Representación de la distribución de los esfuerzos para un talud inclinado.

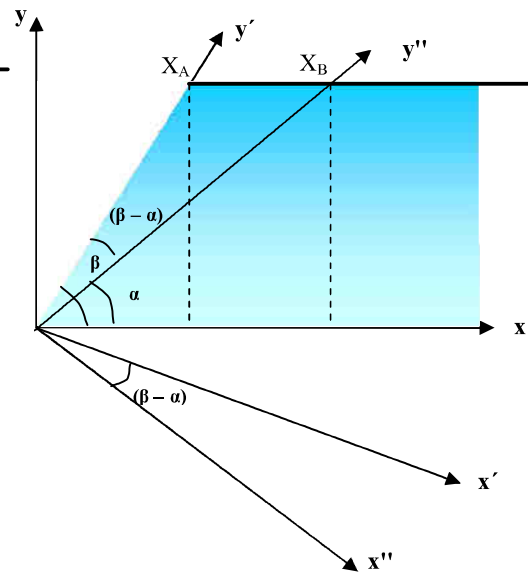


Fig. 3 Relación entre el ángulo de superficie de falla y el ángulo de rotura de falla plana.

Se hallan primero las ecuaciones de equilibrio que gobiernan al cuerpo a estudiar tomando un elemento infinitesimal del mismo, luego se realiza las sumatorias de fuerzas y momentos con respecto a cada uno de los ejes y se iguala a cero, asimismo, se rotan los ejes sobre el plano de falla, cuya angulo de inclinacion se representa por medio de α . Se debe cumplir que el angulo del plano de falla α debe ser menor que el del talud (β), es decir $\beta > \alpha$. Se presenta en la fig.(3) las dos rotaciones de ejes que deben realizarse para poder obtener los esfuerzos. El primer plano de coordenada, se designa como $x'y'$ que se ajusta a la inclinacion que presentala cara libre del talud a estudiar y el segundo plano $x''y''$ a la superficie potencial de rotura, que para el caso estudiado es plana.

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\beta - \alpha) & \sin(\beta - \alpha) \\ -\sin(\beta - \alpha) & \cos(\beta - \alpha) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'' \\ \tau'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \bar{R}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma' \\ \tau' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \bar{R}^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x''x''} & \tau_{x''y''} \\ \tau_{y''x''} & \sigma_{y''y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta - \alpha) & \sin(\beta - \alpha) \\ -\sin(\beta - \alpha) & \cos(\beta - \alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta - \alpha) & -\sin(\beta - \alpha) \\ \sin(\beta - \alpha) & \cos(\beta - \alpha) \end{bmatrix} \quad (9)$$

De resolver el sistema matricial anterior se obtiene:

$$\sigma_{x''x''} = \sigma_{x'x'} \cos^2(\beta - \alpha) + \sigma_{y'y'} \sin^2(\beta - \alpha) + 2\tau_{x'y'} \sin(\beta - \alpha) \cos(\beta - \alpha) \quad (10)$$

$$\tau_{x''y''} = \left[\sigma_{y'y'} - \sigma_{x'x'} \right] \frac{\sin[2(\beta - \alpha)]}{2} + \tau_{x'y'} \cos[2(\beta - \alpha)] \quad (11)$$

$$\sigma_{y''y''} = \sigma_{x'x'} \sin^2(\beta - \alpha) + \sigma_{y'y'} \cos^2(\beta - \alpha) - 2\tau_{x'y'} \cos(\beta - \alpha) \sin(\beta - \alpha) \quad (12)$$

A partir de la ecuación general de la recta se obtienen relaciones de contorno primordiales para la solución del problema estudiado.

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= \gamma \cos \beta x' \\ \sigma_{y'y'} &= (-\gamma \sin \beta - a) y' + b \\ \tau_{x'y'} &= ax' \end{aligned} \quad (13)$$

Donde γ representa el peso específico del material. Con la ecuacion (10) y usando las ecuaciones de contornos (13) permite calacular una expresión del esfuerzo normal adimensional resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{nn}}{\gamma H} &= \frac{x}{H} (\sin \beta - \tan \alpha \cos \beta) [\cos \beta \cos^2(\beta - \alpha) + \bar{a} \sin[2(\beta - \alpha)]] \\ &+ \left[\bar{b} - \frac{x}{H} (\sin \beta + \bar{a}) (\cos \beta + \tan \alpha \sin \beta) \right] \sin^2(\beta - \alpha) \end{aligned} \quad (14)$$

Y el esfuerzo cortante resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{nt}}{\gamma H} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{x}{H} (\sin \beta + \bar{a}) (\cos \beta + \tan \alpha \sin \beta) - \bar{b} + \frac{x}{H} \cos \beta (\sin \beta - \tan \alpha \cos \beta) \right] \sin[2(\beta - \alpha)] \\ &+ \frac{x}{H} \bar{a} (\sin \beta - \tan \alpha \cos \beta) \cos[2(\beta - \alpha)] \end{aligned} \quad (15)$$

Las constantes a y b se calculan tomando en cuenta la ecuación 3, sabiendo además que

$$\sigma_{yy} \Big|_{y=H} = q, \text{ es decir, } \int_{x_A}^{x_B} \sigma_{yy} dx \Rightarrow qH(\cot \beta - \cot \alpha), \text{ como puede observarse en la fig. 3}$$

$$\bar{a} = \frac{(\bar{q} - \xi_1)2 \cos \beta - \mu_1 \sin \beta}{(\psi_1 2 \cos \beta + \theta_1 \sin \beta)} \quad (16)$$

$$\bar{b} = \frac{\bar{q} - \xi_1 - \bar{a} \psi_1}{\sin^2 \beta} \quad (17)$$

Donde:

$$\theta_1 = (3 \cos^2 \beta - 1)[(\cot \alpha + \cot \beta) \sin \beta - 2 \cos \beta] + 2H \cos \beta \quad (18)$$

$$\mu_1 = \cos \beta \sin 2\beta [(\cot \alpha + \cot \beta) \sin \beta - 2 \cos \beta] + \sin 2\beta \quad (19)$$

$$\psi_1 = \left[\frac{3}{2} \sin 2\beta \cos \beta - \sin \beta - \frac{3}{4} (\cot \alpha + \cot \beta) \sin 2\beta \sin \beta \right] \quad (20)$$

$$\xi_1 = \left[\frac{1}{4} (\cot \alpha + \cot \beta) \sin 2\beta \cos 2\beta - \cos^2 \beta \cos 2\beta - \sin^2 \beta \right] \quad (21)$$

VALOR MEDIO DE LOS ESFUERZOS NORMAL Y CIZALLA PARA UN TALUD INCLINADO

Con el objetivo de comprobar los resultados al usar las fórmulas halladas para un talud inclinado con superficie potencial de rotura plana, Ucar (2004) ^{*1} determinó la altura crítica de un talud, dándole valores específicos de la inclinación de la superficie plana (ángulo α), y peso específico (γ) para un talud vertical, cuyo factor de seguridad mínimo es igual a 1. Como la expresión obtenida del esfuerzo varía en cada punto de x se procede a realizar la integral del valor medio para la ecuación (14) perteneciente al esfuerzo normal adimensional, expresión a utilizar para la integración es:

$$\frac{\sigma_{n(prom)}}{\gamma H} = \frac{1}{X_B - X_A} \int_{X_A}^{X_B} \sigma_n(x) dx \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{n(prom)}}{\gamma H} &= \frac{1}{2} (\cot \beta + \cot \alpha) (\sin \beta - \tan \alpha \cos \beta) [\cos \beta \cos^2 (\beta - \alpha) + \bar{a} \sin [2(\beta - \alpha)]] \\ &\quad - \frac{1}{2} (\cot \beta - \cot \alpha) (\sin \beta + \bar{a}) (\cos \beta + \tan \alpha \sin \beta) \sin^2 (\beta - \alpha) + \bar{b} \sin^2 (\beta - \alpha) \end{aligned} \quad (23)$$

También se realiza el mismo procedimiento para el esfuerzo de cizalla ecuación (15) obteniéndose:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{m(prom)}}{\gamma H} &= -\frac{1}{4} (\cot \beta + \cot \alpha) (\sen \beta + \bar{a}) (\cos \beta + \tan \alpha \sen \beta) \sen [2(\beta - \alpha)] \\ &\quad - \frac{\cos \beta}{4} (\cot \beta + \cot \alpha) (\sen \beta - \tan \alpha \cos \beta) \sen [2(\beta - \alpha)] \\ &\quad + \frac{\bar{a}}{2} (\cot \beta + \cot \alpha) (\sen \beta - \tan \alpha \cos \beta) \cos [2(\beta - \alpha)] + \frac{\bar{b}}{2} \sen [2(\beta - \alpha)] \end{aligned} \quad (24)$$

^{*1} La altura crítica de un talud se calcula por medio de la ecuación $H_c = \frac{4C}{\gamma} \tan(\alpha)$, sabiendo que

$\alpha = 45 + \phi / 2$ donde: C=cohesión, γ =peso específico, α =ángulo de falla, ϕ = ángulo de fricción interna. Tomado del libro del Manual de anclajes.

Aplicando la ecuación de Factor de seguridad con las ecuaciones promedios de los esfuerzos (23) y (24) y tomando como el valor de la cohesión de 4 tf/m², peso específico de 2 tf/m³ y el ángulo de falla (α) 60°, la altura crítica es de Hc=13,8564 m, el valor del ángulo del talud (β) para este caso se toma 90°. Con estos valores se procede a determinar el factor de seguridad por medio de la expresión:

$$F_s = \frac{C / (\gamma H) + \sigma_n / (\gamma H) \cdot \tan(\phi)}{\tau_n / (\gamma H)} \quad (25)$$

El valor calculado para el esfuerzo normal con los valores dados es $\sigma_n / \gamma H = 0,125$, y el valor para el esfuerzo de cizalla es $\tau_n / \gamma H = 0,2165$, introduciendo todos los valores en la ecuación de factor de seguridad se obtiene que Fs=1, indicando que la expresión halladas en este capítulo de los esfuerzos normal y tangencial donde se obtiene valores en cada punto de la superficie de falla cumple con las condiciones validando la expresión.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Se desea hallar sobre una superficie potencial de rotura plana los esfuerzos actuantes teniendo en cuenta: La altura del talud (H) es igual a 40 m, el ángulo de inclinación de la superficie del talud con respecto a la horizontal β es igual a 90, el ángulo de la superficie de rotura con respecto a la horizontal es igual a 45, la sobrecarga es de 0 KN/m².

y	x (m)
	0
5	5,177651569
10	10,35530314
15	15,53295471
20	20,71060628
25	25,88825784
30	31,06590941
35	36,24356098
39,99	41,41085725

Tabla 1. Valores obtenidos en excel Para la superficie de rotura plana.

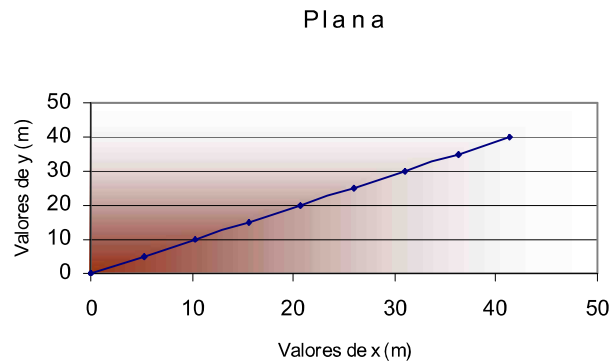


Fig. 4 Representación gráfica de la superficie de rotura plana.

En la fig. 4 se puede observar la superficie de rotura en función de los datos propuestos. Aplicando las ecuaciones (18, 19, 20, 21) se calcula los parámetros que nos ayudan a calcular las constantes \bar{a} y \bar{b} adimensional aplicando las ecuaciones (16, 17) posteriormente se calcula la distribución de los esfuerzos normal y de cizalla aplicando las ecuaciones analíticas (14, 15) obteniéndose:

$\sigma_n/\gamma H$	$\zeta_n/\gamma H$
0,517449748	0,499695414
0,45276853	0,437233487
0,388087311	0,37477156
0,323406093	0,312309633
0,258724874	0,249847707
0,194043656	0,18738578
0,129362437	0,124923853
0,064681219	0,062461927
0,000129362	0,000124924

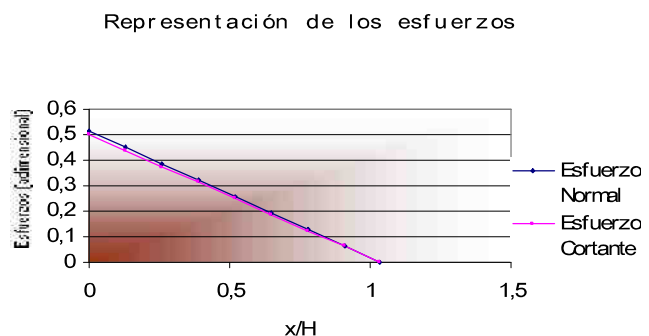


Tabla 2. Valores obtenidos en excel de esfuerzos adimensionales normal y de cizalla para la rotura plana.

Fig. 5 Representación gráfica de los esfuerzos normal y cizalla para una superficie de rotura plana.

Se puede notar en la tabla 2 que los esfuerzos en el pie del talud son aproximadamente un factor de 0,5 con respecto a la presión que ejerce la altura del talud, y para la cresta del talud el esfuerzo tiende a ser cero un valor lógico porque sobre el talud no se ejerce ninguna presión.

CONCLUSIONES:

A través de la investigación llevada a cabo en el presente estudio se concluye que es fundamental determinar con la mayor precisión posible el campo de esfuerzos que actúa sobre el macizo rocoso. Asimismo en el caso que se requiera analizar la estabilidad de un talud en particular, es necesario conocer previamente el intervalo de tensiones normales σ_n , o expresado en forma adimensional en términos de σ_n / σ_c en los puntos extremos de la superficie potencial de falla, es decir en la cresta y en el pie del talud.

Bajo estas circunstancias, se determina con mayor exactitud la envolvente lineal de cizallamiento, y por tanto su resistencia a cero esfuerzo normal conjuntamente con la pendiente de la recta en función de las condiciones de frontera establecidas para el problema investigado.

De acuerdo a los resultados obtenidos la tensión o esfuerzo normal varía notablemente en función tanto de la inclinación del talud, como la del plano potencial de falla. Asimismo se determinó una expresión que permite hallar la distribución de los esfuerzos en cualquier punto de la superficie de rotura, importante al momentote estabilizar un talud.

BIBLIOGRAFÍA

- Apostol, Tom, 1965. Matemática básica para ingenieros. Editorial reveseté S.A. Volumen I, Barcelona. p. 575.
- Anagnostopoulos, A. & Papadopoulos, V., 1989. Stabilité des talus dans les sols cohérents anisotropes. Université nationale technique d'Athènes. Bull Halson Labo. P. et ch. -164. p. 33 – 41.
- Torres, R., 1992. Nuevos criterios sobre la resistencia del concreto. Tesis de la maestría. Universidad de Los Andes. Venezuela. p. 160.
- Goncalves R., 1999. Introducción al análisis de esfuerzo, Universidad Simón Bolívar Caracas Venezuela. Industria Gráfica Integral C.A. p. 1-93.
- Eisenberg, M., 1980. Introduction to the mechanics of soils. University of Florida, Canada. Addison – Wesley Publishing Company. p. 1-74.
- González de V., L., 2002. Ingeniería Geológica. Pearson Educación. Madrid. p. 430 – 486.
- Jumikis, A., 1979. Rock Mechanics. Primera edición, Volumen 3, The State University of the New Jersey USA, Trans Tech Publications. p. 18-248.
- Ucar, R., 2004. Manual de Anclajes en Ingeniería Civil. Universidad Politecnica de Madrid, España. p. 53 – 275.