

# Linearización de la ecuación de Boussinesq para la gestión de acuíferos libres

D. Pulido-Velázquez, A. Sahuquillo, J. Andreu y M. Pulido-Velázquez

Instituto de Ingeniería del Agua y Medio Ambiente (IIAMA). Departamento de Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente.  
Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera, s/n. 46022 Valencia (España).  
E-mail: dapuve@doctor.upv.es

## RESUMEN

Para evaluar la gestión conjunta de aguas superficiales y subterráneas se suele recurrir a modelos matemáticos que simulan simultáneamente la componente superficial y subterránea y la interacción entre ambas. Para tener en cuenta el comportamiento estocástico de la hidrología superficial en estos modelos los escenarios deben definirse sobre horizontes temporales largos. Se requiere un modelo de acuífero eficiente para disminuir el coste computacional de simular múltiples escenarios sobre intervalos de tiempo acumulados grandes. Por este motivo, a pesar de que la mayoría de los acuíferos que interaccionan con el sistema superficial son libres (no lineales), se suele recurrir a modelos lineales aunque sean estrictamente aplicables solamente a acuíferos confinados (lineales). Usando técnicas de autovalores se puede derivar una modelación de parámetros distribuidos explícita y continua en el tiempo de la ecuación de flujo para acuífero confinado. Con esta solución, los niveles piezométricos y el intercambio de flujo con el río se pueden calcular eficientemente, lo que representa una importante ventaja en la simulación del uso conjunto. Se presenta una solución del flujo en acuífero libre basada en una nueva aproximación para linealizar la ecuación de Boussinesq. Usando un cambio de variable es posible definir una ecuación con una estructura similar a la ecuación lineal de flujo. La única diferencia se encuentra en un término que depende de la propia solución. Este término se puede aproximar con una acción ficticia, definible sin un gran coste computacional, lo que permite aplicar la formulación desarrollada en el Método de los Autovalores, aprovechando sus ventajas.

Palabras clave: acuífero libre, autovalores, ecuación de Boussinesq, modelo distribuido, uso conjunto

## ***A distributed groundwater flow modelling for efficient integration of unconfined aquifers in conjunctive use models***

### ABSTRACT

*To evaluate surface and groundwater conjunctive management it is usual to employ mathematical models that simulate simultaneously surface and groundwater components and the hydraulic interaction between them. If we want to take into account the stochastic behaviour of the surface hydrology, scenarios over long time horizons should be defined. An efficient aquifer model is required for simulating several management alternatives for considerable accumulated time periods. For this reason, although most aquifers hydraulically connected with the surface system are unconfined (non-linear), it is usual to apply linear models, with low computational cost, although they are strictly applicable only to confined aquifers (linear). The eigenvalue technique provides an explicit and continuous in time solution for confined groundwater flow equation. Through this solution the aquifer heads and the stream aquifer flow exchange can be efficiently computed, what represents an important computational advantage in conjunctive use simulation. A solution of the flow in an unconfined aquifer is presented. It is based on a new approach to linearize the Boussinesq equation. Using a change of variable it is possible to define an equation with similar structure to the linear confined groundwater flow equation. The only difference is found in a term that depends on the solution. This term can be approximated by means of a fictitious stress, which can be defined without a high computational cost. Using this fictitious stress the Eigenvalues Method formulation can be applied, making use of its advantages.*

*Key words: Boussinesq equation, conjunctive use, distributed model, eigenvalues, unconfined aquifer*

## Introducción

Los modelos matemáticos de flujo subterráneo de parámetros distribuidos que se basan en una discretización espacial del acuífero permiten considerar la

variabilidad espacial de las acciones y las características del mismo.

Los modelos más extendidos son los de Elementos Finitos y Diferencias Finitas, en los que se discretiza tanto el espacio como el tiempo. Estos pre-

cisan determinar en cada instante de tiempo la solución en todas las celdas y permiten modelar acuíferos libres (no lineales) mediante cálculos iterativos en cada incremento de tiempo. Pero estos modelos no se suelen incluir como tales en modelos complejos de uso conjunto ya que suponen un importante lastre en memoria y tiempo de ejecución. En su lugar se suele recurrir al uso de funciones de influencia (F.I.) o matrices de respuesta (ej. Maddock, 1972; Morel-Seytoux y Daly, 1975; Schwartz, 1976) que alivian el coste computacional, aunque sigue siendo alto (Andreu y Sahuquillo, 1987; Andreu *et al.*, 1982). Para aplicar funciones de influencia se requiere que la ecuación diferencial de flujo sea lineal, condición que no se cumple en acuíferos libres. En estos casos sólo es aceptable aplicar la formulación si se linealiza considerando transmisividad constante en el tiempo, lo cual sólo es aceptable para descensos pequeños.

El Método de los Autovalores, presentado por Sahuquillo (1983), se basa en la resolución de la ecuación lineal de flujo para acuífero con transmisividad constante en el tiempo. Discretizando el espacio, el método proporciona una solución explícita mediante una ecuación de estado en función de las condiciones iniciales y las acciones actuantes, no siendo preciso almacenar las acciones previas. Por tanto, presenta importantes ventajas computacionales para la inclusión de la componente subterránea en modelos complejos de gestión de recursos hídricos, permitiendo la simulación explícita de múltiples alternativas para largos períodos de simulación (Andreu y Sahuquillo, 1987).

El Método de los Autovalores ha sido implementado en el módulo de simulación de la gestión de cuencas SIMGES del sistema soporte a la decisión AQUATOOL (Andreu *et al.*, 1996), que ha sido utilizado para la simulación de la gestión conjunta de aguas superficiales y subterráneas en sistemas complejos correspondientes a distintas cuencas (Andreu *et al.*, 1996). Sin embargo, como también ocurre con el método de las funciones de influencia, no es posible modelar acuíferos libres en los que la transmisividad varíe significativamente en el tiempo al ser su comportamiento no lineal. Maddock (1974) presentó una "función de respuesta" para acuífero libre (no lineal) modelado con la ecuación de Boussinesq mediante una aplicación de la teoría de la perturbación. Además de los inconvenientes que presentan las funciones de influencia de requerir almacenar acciones e influencias previas, estas funciones de respuesta para acuíferos no lineales presentan el problema añadido de una excesiva complejidad en la formulación, reduciéndose el interés práctico.

Se presenta a continuación una nueva forma de linealizar la ecuación de flujo en acuífero libre (la ecuación de Boussinesq), que proporciona mejores resultados que las habitualmente empleadas. La ecuación lineal se puede resolver empleando el Método de los Autovalores, conservando sus ventajas computacionales y mejorando los resultados obtenidos en acuíferos libres.

### Antecedentes. El método de los autovalores

La ecuación que describe el flujo en un acuífero en que la transmisividad puede considerarse invariante en el tiempo (acuífero con comportamiento lineal) es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + w = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

donde:

$h=h(x,y,t)$  es el nivel piezométrico sobre el nivel de referencia,  $S(x,y)$  es el coeficiente de almacenamiento,  $w(x,y,t)$  es una función fuente (+) o sumidero (-), o caudal extraído (-) o recargado (+) por unidad de área,  $T_x(x,y)$  y  $T_y(x,y)$  son las transmisividades en las direcciones horizontales  $x$  e  $y$ , que se hacen corresponder con las direcciones principales de conductividad hidráulica,  $T_x(x,y)$  y  $k_x(x,y)$ . Estas transmisividades vienen dadas por  $T_x(x,y)=k_x \cdot b$  y  $T_y(x,y)=k_y \cdot b$ ;  $b=b(x,y)$  es el espesor saturado y es invariante en el tiempo en los acuíferos con comportamiento lineal (acuíferos confinados o libres con variaciones de nivel despreciables frente al espesor saturado).

El Método de los Autovalores resuelve la Ec. (1) para acuíferos con comportamiento lineal, discretizando el espacio (en diferencias o elementos finitos). La expresión matricial de esta ecuación lineal, obtenida sustituyendo las derivadas parciales espaciales por sus expresiones en diferencias finitas (Sahuquillo, 1983), es:

$$[T] \cdot \bar{H} + \bar{W} = [SF] \cdot \frac{d\bar{H}}{dt} \quad (2)$$

donde:

$\bar{H}$  es el vector de niveles piezométricos de dimensiones  $N \times 1$ , siendo  $N$  el número de nodos o celdas activas existentes en la discretización del acuífero;  $[T]$  es una matriz simétrica ( $N \times N$ ) cuyos elementos dependen de la transmisividad, discretización espacial y condiciones de contorno;  $[SF]$  es una matriz diagonal

(N x N) cuyos elementos dependen del coeficiente de almacenamiento y de la discretización espacial;  $\bar{W}$  es el vector de acciones exteriores (bombeos o recargas), de dimensiones N x 1.

Se trata de resolver el autoproblema:

$$[T] \cdot [A] = [\alpha] \cdot [SF] \cdot [A] \quad (3)$$

donde  $[\alpha]$  y  $[A]$  son respectivamente la matriz diagonal de autovalores (N x N) y la matriz de los correspondientes autovectores (N x N) del problema de autovalores.

Los autovectores forman una base ortonormal sobre la cual, establecido un paso de tiempo  $p = \Delta t$ , en el intervalo de tiempo  $t$  se puede obtener explícitamente un vector de estado ( $\bar{L}_t$ ), con tantas componentes como celdas activas existen en la discretización:

$$\bar{L}_t = [E]_p \cdot \bar{L}_{t-1} + [X]_p \cdot \bar{W}_t \quad (4)$$

donde:

$[E]_p$  es una matriz diagonal (N x N) de decaimiento de las condiciones iniciales ( $\bar{L}_{t-1}$ ), cuya componente (i,i) viene dada por la expresión  $e_{p(i,i)} = \exp(-\alpha_i \Delta t)$ ;

$$[X]_p = \begin{bmatrix} [I] - [E] \\ [\alpha] \end{bmatrix} \cdot [A]^T$$

siendo  $[I]$  la matriz identidad y  $[A]^T$  la transpuesta de la matriz  $[A]$ .

Admitiendo que las acciones puedan expresarse como combinación lineal de unas acciones unitarias (acciones elementales) definidas con una distribución espacial constante en el tiempo,

$$\begin{aligned} \bar{W}_t &= [D_b] \cdot \bar{B}_{t(m)}, \\ \bar{L}_t &= [E]_p \cdot \bar{L}_{t-1} + [X]_p \cdot \bar{W}_t = [E]_p \cdot \bar{L}_{t-1} + [\psi]_p \cdot \bar{B}_t \end{aligned} \quad (5)$$

donde:

$\bar{B}_t$  es el vector de intensidad de las acciones aplicadas (Nax1) en el intervalo de tiempo  $t$ , siendo Na el número de acciones elementales;  $[D_b]$  es una matriz (NxNa) cuyas columnas se definen con la distribución en tanto por uno de las acciones (acciones elementales) entre las celdas de la discretización;  $[\psi]_p = [X]_p \cdot [D_b]$  es una matriz de afección de las acciones unitarias (NxNa).

A partir del vector de estado, las variables de interés (variables de control), niveles o flujos en zonas del acuífero, son computadas mediante la Ec. (6), no requiriéndose determinar la solución en todas las celdas (Andreu y Sahuquillo, 1987).

$$\bar{C}_t = [A_R] \cdot \bar{T}_t \quad (6)$$

siendo  $A_R$  la matriz reducida de autovectores, con tantas filas como variables se desean conocer, obtenidas por combinación lineal de las filas de  $[A]$  (Andreu y Sahuquillo, 1987).

### Antecedentes: soluciones de la ecuación de Boussinesq

La ecuación de Boussinesq (Ec. 7) describe el flujo en un acuífero libre como el representado en la Fig. 1, en el que la transmisividad no se puede considerar invariante en el tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_x \cdot (h+b) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_y \cdot (h+b) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right] + w(x,y) = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7)$$

donde:

$h=h(x,y,t)$  es el nivel piezométrico sobre el nivel de referencia correspondiente a la altura en el río;  $S(x,y)$  es el coeficiente de almacenamiento;  $w(x,y)$  es una función fuente o sumidero, o caudal extraído o recargado por unidad de área;  $k_x(x,y)$  y  $k_y(x,y)$  son las permeabilidades en las direcciones x e y suponiendo que se corresponden con las direcciones principales de conductividad hidráulica;  $b$  es la distancia de la base del acuífero al nivel del cuerpo de agua superficial con el que se encuentra hidráulicamente conectado (ver Fig. 1). En este caso es una constante, ya que la base del acuífero se ha considerado horizontal.

Tras realizar una revisión de las soluciones de la Ec. (7) se puede concluir que existe un reducido número de soluciones analíticas que resuelven casos ideales sencillos. Además, tanto las soluciones analíticas como las numéricas requieren unos cálculos complejos y tienen un alto coste computacional, aspecto que también es resaltado por otros investigadores (Guo, 1996). El tiempo de cálculo requerido es excesivo para integrar la componente subterránea en modelos de uso conjunto, especialmente en modelos de optimización sobre largos horizontes temporales. Matsukawa et al. (1992) han presentado un modelo no lineal de optimización del uso con-

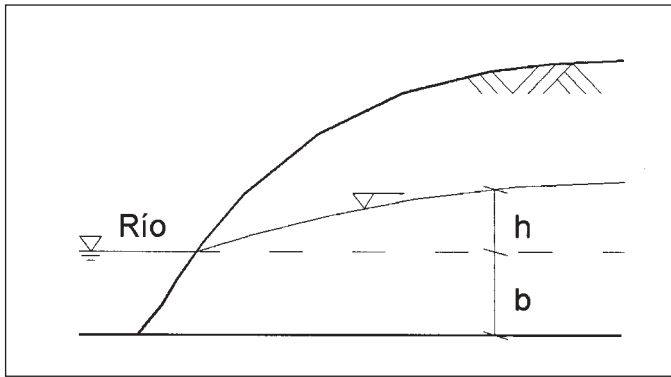


Fig. 1. Acuífero libre  
Fig. 1. *Unconfined aquifer*

junto. El acuífero no confinado se simula usando una aproximación implícita en diferencias finitas de la ecuación de Boussinesq, que se incluye en las subrutinas del modelo del algoritmo de optimización. Los propios autores reconocen que la limitación de este modelo es el alto coste computacional que supone esta forma de integración de la componente subterránea para la optimización mensual en períodos mayores a un año. Por esta razón, debido a la dificultad de reproducir el comportamiento no lineal de la ecuación de Boussinesq (Ec. 7), los modelos matemáticos de acuíferos para incluir la componente subterránea en modelos de uso conjunto son generalmente lineales. Todos ellos, por tanto, requieren linealizar la ecuación de Boussinesq para resolverla.

La forma más habitual de linealizar la Ec. 7 es aproximar la transmisividad con un valor invariante en el tiempo, dado por el producto de la conductividad hidráulica por un espesor característico invariante. De esta forma resulta una ecuación lineal idéntica a la Ec. 1 que resuelve el Método de los Autovalores. Pero ¿qué espesor saturado se debe adoptar como espesor característico invariante? En la bibliografía se recogen algunas propuestas. Guo (1996) para evaluar el efecto producido por variaciones de nivel superficial conectado al acuífero en ausencia de bombeos y recargas, compara los resultados obtenidos considerando como espesor invariante las condiciones iniciales, el nivel constante del cuerpo de agua conectado al acuífero y el valor medio de ambos valores (las condiciones iniciales y el nivel superficial). Concluye que esta última aproximación suele proporcionar una mejor predicción en conjunto. Ostfeld *et al.* (1999) linealizan la ecuación de Boussinesq en torno a un punto al que llaman "profundidad representativa de flujo", y que definen como la media del espesor saturado inicial y las condiciones en estado estacionario.

Se plantea a continuación una nueva forma de

linealizar la ecuación de Boussinesq que permite mejorar significativamente los resultados obtenidos al modelar acuíferos libres.

### Fundamento de la aproximación propuesta

Con el cambio de variable:

$$\mu = h + \frac{h^2}{2 \cdot b} \quad (8)$$

la Ec. 7 equivale a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_x \cdot b \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_y \cdot b \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] + w(x, y) = \frac{S \cdot b}{(h + b)} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} \quad (9)$$

Considerando:

$$T'_x = k_x \cdot b \text{ y } T'_y = k_y \cdot b \quad (10)$$

se obtiene una expresión en  $\mu$  análoga a la expresión en  $h$  para acuífero lineal (Ec. 1):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ T'_x \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T'_y \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] + w(x, y) = S \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} + \xi \quad (11)$$

siendo  $\xi$  el error en la analogía o la diferencia entre la Ec. 1 en  $h$  y la Ec. 9 en  $\mu$ .

$$\xi = S \cdot \left( (1 + 2 \cdot \mu / b)^{-0.5} - 1 \right) \cdot \partial \mu / \partial t \quad (12)$$

$\xi$  viene dada por una expresión que depende de la solución y hace que la Ec. 11 sea no lineal. Si se linealiza, bien despreciando el término de error o aproximando su efecto mediante una acción ficticia ( $W_{ficticia}$ ) constante en el intervalo de tiempo para el que se integra la ecuación, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ T'_x \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T'_y \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] + w_T(x, y) = S \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} \quad (13)$$

siendo  $w_T = w_{real} + W_{ficticia}$ .

Esta última ecuación, definida sobre la variable  $\mu$ , es lineal, y por lo tanto es aplicable el principio de

superposición para definir la solución  $\mu(x,y)$ , ó  $L(x,y)$  en la base de autovectores:

$$\mu(x,y)_{TOTAL} = \mu(x,y)_{APROX} + \mu(x,y)_{FICTICIA} \quad (14)$$

Como  $\xi$  depende de la propia solución en el intervalo,  $\mu(x,y)_{TOTAL}$ , para definir  $w_{ficticia}$  primero será necesario aproximar  $\mu(x,y)_{TOTAL}$  con  $\mu(x,y)_{APROX}$  obtenida con  $w_{real}$ . Con  $w_{ficticia}$  se puede aproximar  $\mu(x,y)_{FICTICIA}$ ; sustituyéndola en (12) proporciona una mejor aproximación de  $\mu(x,y)_{TOTAL}$  (solución semiexplícita o en dos pasos).

Trabajando con la nueva variable  $\mu$ , los niveles piezométricos y flujos en cualquiera de las direcciones principales de conductividad  $l=x$  o  $l=y$  se obtendrían con las expresiones (15) y (16):

$$h = b \cdot \left(1 + 2 \cdot \mu / b\right)^{1/2} - 1 \quad (15)$$

$$Q_l = k_l \cdot (b + h) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial l} = k_l \cdot b \cdot \frac{\partial \mu}{\partial l}$$

definiendo  $T'_l = k_l \cdot b$  se tiene:

$$Q_l = T'_l \cdot \frac{\partial \mu}{\partial l} \quad (16)$$

Se pretende así resolver la Ec. 13 discretizando el espacio análogamente a como resuelve el Método de los Autovalores la Ec. 1.

### Alternativas propuestas

Discretizando el espacio se puede definir  $\xi$  para cada celda o nodo activo existente en la discretización. Con estas variables asociadas a cada celda activa se puede establecer un vector  $\bar{\xi}$ . Atendiendo al trato que se le dé a dicho vector  $\bar{\xi}$ , se plantean las siguientes alternativas para definir  $\bar{w}_{ficticia}$  sobre cada celda activa de la discretización:

- incluir el valor medio de las componentes del vector  $\bar{\xi}$  en cada intervalo de tiempo
- aproximar las componentes de  $\bar{\xi}$  con el primer término de su desarrollo en serie de Taylor centrado en 0 (ver Ec. 18) e incluir su valor medio en cada intervalo de tiempo.

La primera alternativa, la de definir las componentes de  $\bar{w}_{ficticia}$  con el valor medio de las componentes

del vector  $\bar{\xi}$  en cada intervalo de tiempo, da lugar a la siguiente expresión:

$$W^t_{ficticia_i} = \frac{-\int_0^{\Delta t} \bar{\xi}_i \cdot ds}{\Delta t} = \quad (17)$$

$$= \frac{SF_i}{\Delta t} \cdot \left\{ b \left[ \left(1 + 2 \frac{\mu_{i-1}(i)}{b}\right)^{0.5} - \left(1 + 2 \frac{\mu_i(i)}{b}\right)^{0.5} \right] + \mu_i(i) - \mu_{i-1}(i) \right\}$$

que obligaría a determinar la solución  $\mu_i$  en cada celda activa. Se perderían por lo tanto las ventajas computacionales del método, razón por la que se desecha esta alternativa.

Cada componente del término  $\bar{\xi}$  se puede aproximar por su desarrollo en serie de Taylor. Así para un desarrollo centrado en 0 se tiene:

$$\xi_i = -SF_i \cdot \frac{\mu_i}{b} \cdot \frac{\partial \mu_i}{\partial t} + \frac{3}{2} \cdot SF_i \cdot \frac{\mu_i^2}{b^2} \cdot \frac{\partial \mu_i}{\partial t} - \dots \quad (18)$$

son los elementos de la diagonal de la matriz  $[SF]$ .

Se puede demostrar que la serie anterior converge cuando se cumple que:

$$\left| \frac{2 \cdot \mu_i}{b} \right| < 1 \Rightarrow |h_i \cdot (2 \cdot b + h_i)| < b^2 \quad (19)$$

de cuya expresión se deduce que las componentes  $h_i$  que satisfacen la inecuación anterior verificarán:

$$-2,414 \cdot b < h_i < 0,414 \cdot b \quad (20)$$

Se propone aproximar  $\bar{\xi}$  con el vector definido con el primer término ( $\xi^1$ ) del desarrollo propuesto (Ec. 18):

$$\xi_i^1 = -SF_i \cdot \frac{\mu_i}{b} \cdot \frac{\partial \mu_i}{\partial t} \quad (21)$$

Empleando esta propuesta y aprovechando la ortogonalidad de los autovectores  $[A]$  respecto al almacenamiento  $[SF]$  (Sahuquillo, 1983), se puede aproximar el módulo o intensidad media de la acción ficticia para cada intervalo de tiempo  $t$  en función del vector de estado. Al expresarse en función del vector de estado no será necesario determinar  $\mu_i$  en cada celda y se pueden reducir los cálculos a las soluciones de interés. La intensidad de la acción ficticia  $B_f$  se

obtendría con el valor medio de las componentes del vector  $\bar{\xi}$  (Ec. 22):

$$B_i^f = \frac{\int_0^{\Delta t} \frac{1}{b} \cdot \sum_{i=1}^n l_{r(i)} \cdot \frac{\partial l_{r(i)}}{\partial t} dt}{\Delta t} = \frac{1}{2 \cdot b \cdot \Delta t} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n [l_{r(i)}^2 - l_{r-1(i)}^2] \right\} \quad (22)$$

La distribución espacial de esta acción ficticia entre las celdas activas de la discretización del acuífero variará en cada instante y ello obligaría a determinar en cada paso de tiempo la columna de  $[\psi]_p$  asociada a dicha acción mediante el producto  $[\psi]_p = [X]_p \cdot [D_b]$ . Esto supondría un notable incremento en los cálculos, reduciéndose el interés práctico de la aproximación propuesta. De aquí que se plantease otra forma de derivar la solución.

Sahuquillo (1983) presentó una interpretación física para la formulación del Método de los Autovalores. El acuífero se comporta como si se compusiera de N modelos unicelulares (tantos como celdas activas) y cada uno de estos  $i$  modelos unicelulares evolucionan proporcionalmente a la superficie definida por el autovector  $i$ , desaguando con un "coeficiente de desagüe" dado por el autovalor  $\alpha_i$ . Las acciones se reparten entre los modelos unicelulares de acuerdo con unos "coeficientes de reparto" que representan la distribución en tanto por uno de cada acción entre los distintos depósitos unicelulares. Esta interpretación permite establecer un paralelismo entre la formulación del Método de los Autovalores y los Modelos Pluricelulares Englobados (Sahuquillo, 1983).

Establecida la analogía con los modelos pluricelulares, la variación en las componentes del vector de estado  $\Delta l_{r(i)}$  que se determina con el término de afectación de la acción ficticia sobre dichas componentes, se puede formular:

$$\Delta l_{r(i)} = \left( \frac{1 - \exp(-\alpha_i \cdot \Delta t)}{(\alpha_i \cdot v_i)} \right) \cdot D_{f(i)}' \cdot B_i^f \quad (23)$$

donde  $D_{f(i)}$  es un vector definido con los coeficientes de reparto de la acción ficticia entre los distintos depósitos unicelulares.

Dicha distribución entre modelos unicelulares es proporcional al volumen almacenado por cada autovector por encima del nivel de referencia  $v_i$  (Sahuquillo, 1983), siendo:

$$v_i = \sum_j SF_{(j)} \cdot A_{(j,i)} \quad (24)$$

Como además la intensidad de la acción ficticia en cada instante  $B_i^f$  es proporcional a  $l_{r(i)}^2 - l_{r-1(i)}^2$ , se propone adoptar la siguiente aproximación para la distribución entre modelos unicelulares  $D_{f(i)}$ :

$$D_{f(i)}' = \frac{v_i \cdot (l_{r(i)}^2 - l_{r-1(i)}^2)}{\sum_{i=1}^n v_i \cdot (l_{r(i)}^2 - l_{r-1(i)}^2)} \quad (25)$$

## Resultados

Se han analizado los resultados proporcionados por la aproximación propuesta en un caso sintético (Fig. 2). Se trata de un acuífero rectangular, homogéneo y con tres bordes impermeables y uno de nivel constante, que representa el contacto con el río. Se considera conexión perfecta río-acuífero, siendo la altura de la lámina de agua en el río de 10 m. Las dimensiones en planta del acuífero son 3750 m en la dirección paralela al río y 2025 m en la transversal, tal y como se aprecia en la figura 2. La permeabilidad toma un valor homogéneo de 50 m/día en todo el acuífero en ambas direcciones (transversal y paralela al río). El coeficiente de almacenamiento es de 0,1. Se adopta una discretización de 10x15 celdas, todas ellas con idénticas dimensiones, de 375 m x 225 m.

Las condiciones iniciales de las que se partieron, se obtuvieron de resolver el régimen estacionario del acuífero para una recarga uniformemente repartida sobre el mismo de 0,25 mm/día. En el acuífero se ubican 5 pozos: uno centrado en el mismo y los otros 4 ubicados distando 625 m de los bordes del acuífero o del río (ver Fig. 2). La recarga existente sobre el mismo se supone uniformemente repartida. Se pretende simular el comportamiento del acuífero en un período de 15 años (se consideran años de 360 días y meses de 30 días) bajo las intensidades representadas en la Fig. 2.

Se determinó con MODFLOW (McDonald y Harbough, 1984) para acuífero libre el espesor saturado en las celdas seleccionadas (Fig. 3). También se ha representado la diferencia relativa (error relativo) ( $E_{SOLUCION(j)}$ ) de los resultados conseguidos con MODFLOW para acuífero libre ( $CV_{MODFLOW}$ ) y los obtenidos con las distintas alternativas contempladas para aproximar la solución,  $CV_{SOLUCION(j)}$  (ver Fig. 4), esto es:

$$E_{SOLUCION(j)} = \frac{CV_{MODFLOW} - CV_{SOLUCION(j)}}{CV_{MODFLOW}} \cdot 100 \quad (26)$$

Todas las alternativas contempladas se basan en linealizar la ecuación de Boussinesq (Ec. 7), bien

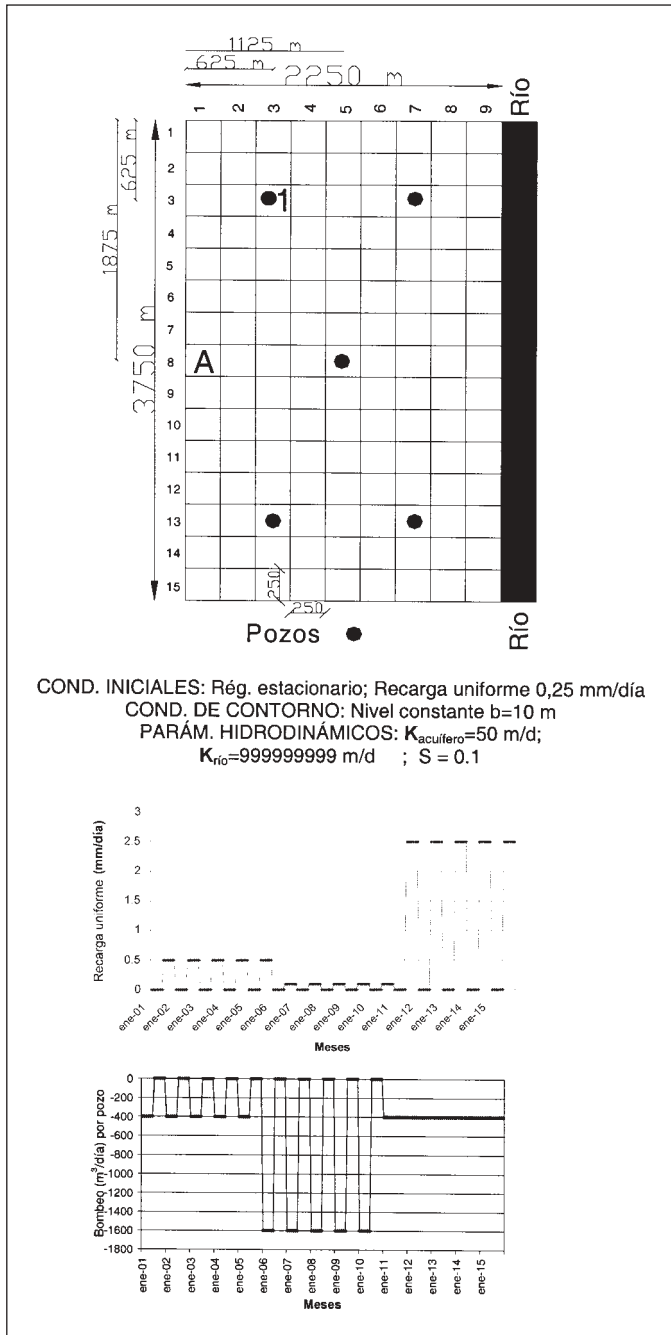


Fig. 2. Acuífero simulado  
 Fig. 2. Simulated aquifer

mediante el cambio de variable propuesto (Ec. 8) o definiendo una transmisividad invariante. Para definir un espesor invariante se consideraron las mismas hipótesis contempladas por Guo (1996): las condiciones iniciales, la altura de la lámina de agua en el río en la zona de conexión con el acuífero y el valor medio de ambos valores (las condiciones iniciales y el nivel del río).

Los espesores saturados representados muestran que en el período de mayor explotación (segundo lustro) se obtienen los mayores errores (máximo cercano al 22%) al considerar una transmisividad invariante definida con el espesor saturado para las condiciones iniciales. Efectivamente, los intensos bombeos reducen el espesor saturado sobre el acuífero y lo alejan de las condiciones iniciales, situándolo más próximo al espesor de referencia, que es la altura de la lámina de agua en el río. Sin embargo, en los últimos 5 años la intensa recarga sitúa las transmisividades más cercanas a las definidas con las condiciones iniciales, valiendo 6,4% los errores máximos obtenidos considerando un espesor saturado invariante dado por el nivel constante de la altura de la lámina en el río. La otra alternativa, la de definir el espesor saturado con el valor medio de las condiciones iniciales y la altura de la lámina en el río, produce siempre errores intermedios entre las dos alternativas anteriores.

En ambas celdas y a lo largo de todo el período de simulación se aprecia una mejora significativa al evaluar el espesor saturado con la nueva linealización propuesta respecto a considerar una transmisividad invariante. Los errores máximos no alcanzan en ninguna de las celdas el 1,5%, mientras que, suponiendo una transmisividad invariante, la alternativa que mejor se comporta supera el 14,5%. Esta misma conclusión se obtiene al analizar el espesor saturado en otras celdas.

También se representa el intercambio río-acuífero evaluado con MODFLOW para acuífero libre (Fig. 5) y el error cometido (E), al determinar dicho caudal con las distintas alternativas contempladas (Fig. 6). Se alcanzaron las mismas conclusiones obtenidas al analizar los espesores en las celdas de la discretización. La aproximación propuesta mejora significativamente los resultados obtenidos.

Estas mismas conclusiones también se obtienen al analizar los caudales de intercambio río-acuífero, así como el espesor saturado en otras celdas.

El ejemplo considerado supone una prueba muy exigente para la metodología que se propone. Representa un acuífero con una variabilidad en las acciones aplicadas muy acusada que provocan en el acuífero unos cambios relativos de piezometría y flujo muy importantes. Durante el período de máxima recarga, que son los últimos 5 años, en más de la mitad de las celdas del acuífero se supera en algún momento la condición de convergencia establecida en las ecuaciones (19) y (20) para la aproximación de  $\xi$  con su desarrollo en serie (73 celdas). Además, en algunas de esas celdas, dicha condición es superada durante un intervalo temporal importante, especial-

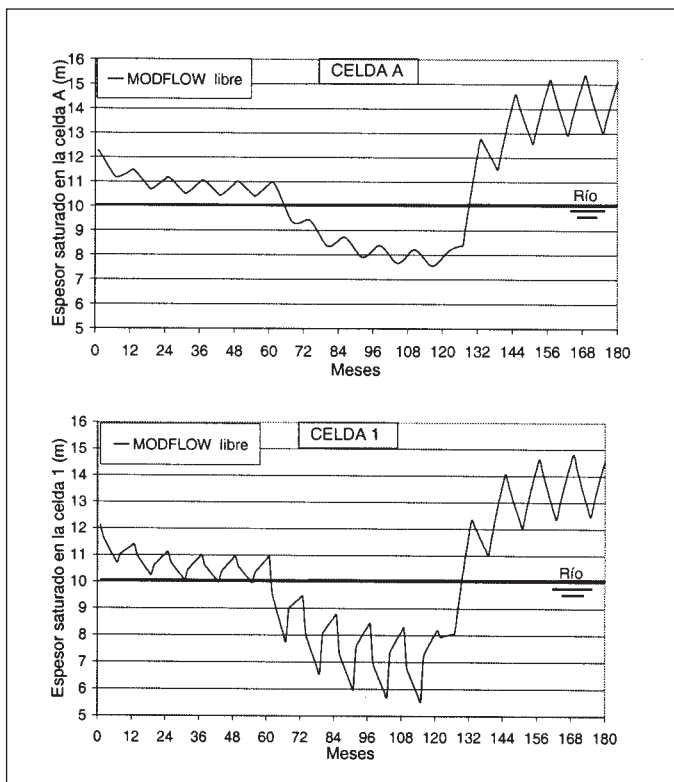


Fig. 3. Espesor saturado en las celdas seleccionadas evaluado con MODFLOW para acuífero libre  
 Fig. 3. Saturated thickness in the selected cells evaluated by MODFLOW for unconfined aquifer

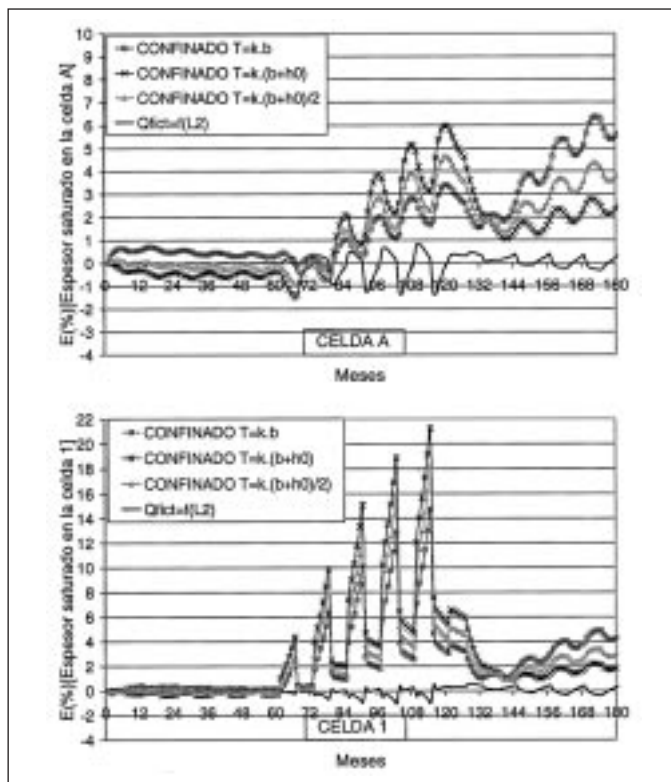


Fig. 4. Diferencia relativa (E%) entre el espesor saturado evaluado con MODFLOW para acuífero libre y otros métodos  
 Fig. 4. Relative distance (E%) between saturated thickness evaluated by MODFLOW and by other methods

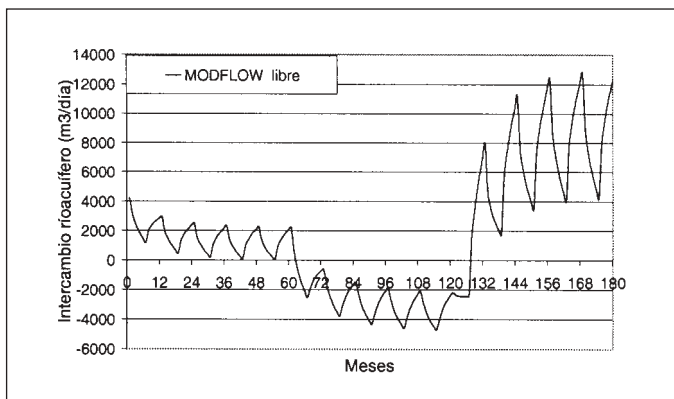


Fig. 5. Caudales de intercambio río-acuífero evaluados con MODFLOW para acuífero libre  
 Fig. 5. Stream-aquifer flow exchange evaluated by MODFLOW for unconfined aquifer

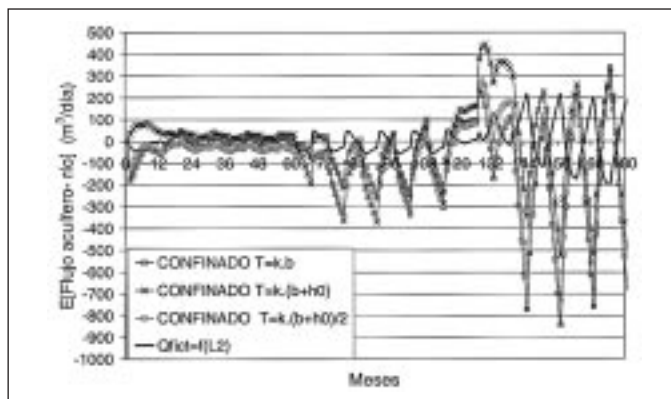


Fig. 6. Diferencia (E(m³/día)) entre caudales de intercambio río-acuífero evaluados con MODFLOW libre y otros métodos  
 Fig. 6. Distance (E(m³/día)) between stream-aquifer flow exchange evaluated by MODFLOW and by other methods

mente en las celdas más alejadas del río, donde la condición se supera en 17 meses de la simulación. Es lógico por tanto que, en este período, la mejora en los resultados obtenidos para el caudal de intercambio sea menos importante. Se continúa trabajando para aplicarla en algunos acuíferos reales.

### Conclusiones

Se presenta una solución semiexplícita para el flujo en acuíferos libres basada en la linealización de la ecuación de Boussinesq.

Mediante un cambio de variable se obtiene una



ecuación análoga a la ecuación de flujo para acuífero confinado. La única diferencia se encuentra en un término que es función de la propia solución, y que hace que la Ec. (11) sea no lineal.

Despreciando dicho término, es aplicable la formulación desarrollada en el Método de los Autovalores (Sahuquillo, 1983), obteniéndose un vector de estado, expresado en una base ortonormal de autovectores. Dicho vector es corregido a posteriori en cada intervalo de tiempo (solución semiexplícita en dos pasos) mediante una acción ficticia constante definida con una aproximación del valor medio de dicho término. Esta aproximación se puede definir en función del vector de estado, sin suponer un importante incremento del coste computacional.

A partir del vector de estado basta con determinar las variables de interés (niveles o flujos en zonas del acuífero), las que pueden ser calculadas de forma eficiente sin necesidad de obtener la solución en todas las celdas.

La solución presentada para acuíferos libres conserva las ventajas computacionales del Método de los Autovalores para acuíferos lineales (Andreu y Sahuquillo, 1987). Permite por tanto, la simulación eficiente de acuíferos libres en modelos complejos de uso conjunto.

## Agradecimientos

Los autores quieren expresar su agradecimiento a los revisores, E. Custodio, J. Gómez y J. Carrera por sus interesantes sugerencias y comentarios sobre la versión inicial de este artículo.

## Referencias

Andreu, J., Labadie, J. y Burns, A.M. 1982. Optimal stream-aquifer management. *Water and Energy: Technical and Policy Issues*. Am. Assoc. Civil Eng.: 478-486.

- Andreu, J. y Sahuquillo, A. 1987. Efficient aquifer simulation in complex systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*. Am. Assoc. Civil Eng., 113 (1): 110-129.
- Andreu, J., Capilla, J. y Sanchís, E. 1996. AQUATOOL, a generalized decision support system for water-resources planning and management, *Journal of Hydrology*, 177: 269-291.
- Guo, W. 1997. Transient groundwater flow between reservoirs and water-table aquifers. *Journal of Hydrology*, 195: 370-384.
- Maddock, T., III. 1972. Algebraic technological from a simulation model. *Water Resources Research*, 8 (1): 129-134.
- Maddock, T., III. 1974. Nonlinear technological functions for aquifers whose transmissivities vary with drawdown. *Water Resources Research*, 10 (4), 877-881.
- Matsukawa, J., Finney, B.A. y Willis, R. 1992. Conjunctive use planning in Mad river basin, California. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 118 (2): 115-132.
- McDonald, M.G. y Harbough, A.W. 1984. *A modular three dimensional finite difference ground water flow model*. U.S. Geological Survey. Washington D.C., Open-File Report 83-875. 83-875.
- Morel-Seytoux, H.J. y Daly, G.J. 1975. A discrete kernel generator for stream-aquifer studies. *Water Resources Research*, 11 (2), 253-260.
- Ostfeld, A., Muzaffar, E y Lansey, K.E. 1999. Analytical ground-water flow solutions for channel-aquifer interactions. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 125(4): 196-202.
- Sahuquillo, A. 1983. An eigenvalue numerical technique for solving unsteady groundwater continuously in time. *Water Resources Research*, 19 (1): 87-93.
- Schwarz, J. 1976. Linear models for groundwater management. *Journal of Hydrology*, 28: 377-392.

Recibido: mayo 2004

Aceptado: julio 2004